http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit06-03-055
DOI: 10.30890/2567-5273.2018-06-03-055

УДК 51-7(075.8)

THE BANRKUPCY PROBABILITY AND AN OPTIMAL INSURANCE RATE IN CASE OF PAYMENTS WITH LOGNORMAL DISTRIBUTION

ЙМОВІРНОСТЬ БАНКРУТСТВА ТА ОПТИМАЛЬНОА СРАХОВА СТАВКА У ВИПАДКУ ВИПЛАТ РОЗПОДІЛЕНИХ ЗА ЛОГНОРМАЛЬНОГО ЗАКОНОМ

ChornyyR.O. / Чорний Р.О.
aspr. / аспр.
Кінаш О.М./ Kinash O.M.
PhD, doc. / канд.фіз.-мат.н., доц.
IvanFranko National University of Lviv,Lviv,
1,UniversytetskaSt., 79000
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів,
Вул..Університетська 1, 79000

Аннотація. *Розглянуто задачу знаходження асимптотики ймовірності банкрутства у випадку великих виплат розподілених за субекспоненційними законами, зокрема у випадку логнормального розподілу. Також знайдено асимптотичне співвідношення для оптимальної страхової ставки при виконанні ряду припущень у страховій моделі.*

Ключові слова: *асимптотика ймовірності банкрутства, важкі хвости, субекспоненційні розподіли, страхова ставка, логнормлаьний розподіл, факторизаційна модель.*

Постановка задачі

Зауважимо, що логнормальний розподіл відноситься до так званих розподілів з «важкими хвостами». Зауважимо також, що ці розподіли відповідають великим виплатам, що становлять особливий інтерес при визначенні ймовірності банкрутства.

Отримати оцінку ймовірності банкрутства $\phi(u)$ у випадку вимог про виплати розподілених за логнормальним законом. Визначити у цьому випадку оптимальну страхову премію, яка забезпечує умову небанкрутства.

Основна частина

Застосовуватимемо наступні терміни та позначення: якщо $F(x)$– функція розподілу, то через $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ позначаємо «хвіст» розподілуF, а через F^{n*} – n-кратну згортку F.

Отже, якщо F– функція розподілу розміру виплат, то $\bar{F}(x)$ – «хвіст» цього розподілу, а

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)\,dy, x > 0,$$

називають проінтегрованим «хвостом» розподілу. [1,ст.186]

Величину $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ називають відносною страховою надбавкою, а для базової умови $\rho > 0$ вживають термін «умова чистого прибутку».

Умова Крамера-Лундберга(див. зокрема [1] ст. 184-186, [2] ст. 223-224) передбачає існування константи ν, яку називають налагоджувальним (регулюючим, коректуючим) коефіцієнтом або коефіцієнтом Лундберга, такої, що

$$\int_0^\infty e^{\nu x}(1-F(x))dx = c/\lambda = (1+\rho)\mu, \tag{1}$$

Розподіли, що не задовольняють умову (1), будемо називати розподілами з «важкими хвостами» [1,ст.188]. До таких розподілів, як згадувалось вище, належать так звані субекспоненційні розподіли.

Для подальшої практичної реалізації підрахунку імовірності банкрутства використовуємо наступну теорему (див. зокрема [1, ст. 197]).

Теорема. Розглянемо модель Крамера-Лундберга (див. зокрема [1] ст. 184-186, [2] ст. 223-224) за умов $\rho > 0$ та $F_I(x) \in S$. Тоді

$$\phi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u),\ u \to \infty \tag{2}$$

Згідно з даною теоремою, у випадку виплат, які мають розподіли із субекспоненційними проінтегрованими «хвостами», імовірність банкрутства допускає просту апроксимацію, що задається формулою (2).

Зауважимо, що умова теореми сформульована в термінах проінтегрованих «хвостів», а не самої функції розподілу $F(x)$.

Підрахунок імовірності банкрутства у випадку великих виплат

Нехай виплати розподілені за Логнормальним розподілом. Тоді справедливе наступне твердження [1].

Твердження. Нехай виплати мають логнормальний розподіл з параметрами $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ та функцією розподілу:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\int_0^x y^{-1}[-(lny-m)^2/2\sigma^2]dt$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\phi(u)$ задається

співвідношенням:

$$\phi(u) \sim \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}(c-\lambda\exp(m+\sigma^2/2))}\frac{u}{(lnu-m)^2}exp\left\{-\frac{(lnu-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, u \to \infty$$

Доведення. У цьому випадку $\mu = Ex_1 = exp\{-(m+\sigma^2/2)\}$,

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c}{\lambda}exp - 1$$

$$\rho^{-1} = \frac{\lambda\mu}{c-\lambda\mu} = \frac{exp\{m+\sigma^2/2\}}{c-\lambda exp\{m+\sigma^2/2\}}$$

$$1-F_I(x) \sim \frac{\sigma^3 e^{-\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}e^m}\frac{x}{(lnx-m)^2}exp\left\{-\frac{(lnx-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \to \infty$$

Тоді ймовірність банкрутства

$$\phi(u) \sim \rho^{-1}\left(1 - F_I(u)\right) \sim$$

$$\sim \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}(c - \lambda \exp(m + \sigma^2/2))} \frac{u}{(lnu - m)^2} exp\left\{-\frac{(lnu - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, u \to \infty$$

Формула для оптимальної страхової ставки в умовах факторизаційної моделі та за умов виплат, що мають Логномальний розподіл.

За умови виплат розподілених за логнормальним розподілом та при виконанні умов факторизаційної моделі [4] знайдемо асимптотичну поведінку оптимальної страхової ставки.

Будемо вважати, що кількість договорів страхування *N*, які знаходяться в страховому портфелі, є випадковою величиною. Кожному договору страхування з номером *j* ставиться у відповідність величина S_j яку називаємо страховою сумою. Нехай Y_j - величина позову за *j* -м договором. Очевидно, що $Y_j \le S_j$. Введемо $X_j = \frac{Y_j}{S_j}$. Випадкову величину X_j назвемо відносним позовом (позовом, що розрахований на одиницю страхової суми).

Будемо також вважати, що випадкові величини X_j та S_j - незалежні. Зауважимо, що в цьому полягає суть F-моделі [4,с.248]. Зрозуміло, що величина позову може бути представлена у вигляді

$$Y_j = X_j S_j \tag{5}$$

Позови, які задовольняють умову (5) назвемо факторизованими [3].

Припустимо, також, що для кожного договору страхування страхова премія Z_j визначається

$$Z_j = zS_j$$

де *z* - деяка стала для всіх договорів страхування(страхова ставка). Зауважимо, що в розглянутій моделі премії є випадковими величинами, що залежать від S_j, що і відрізняє її від класичних постановок задачі.

Будемо вважати, що всі позови факторизовані, випадкові вектори (S_j, X_j) і випадкова величина *N* незалежні в сукупності. Сума премій зібраних по страховому потрфелю рівна

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{N} Z_j$$

сума позовів рівна

$$\overline{Y} = \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

Якщо початковий капітал рівний u_0, то кінцевий страховий фонд рівний

$$U = u_0 + \overline{Z} - \overline{Y} \tag{6}$$

Перша задача пов’язана з моделлю (6) є задача вивчення асимптотики розподілу випадкової величини *U* при відомій величині страхової ставки *z*.

Друга задача – визначення такого мінімального значення *z*, при якому результати страхової діяльності по даному портфелю є прийнятними для страховика.

Для визначення страхової ставки z введемо наступні умови :

$$z \geq EX_j \tag{7}$$

(умова "середньої беззбитковості")

$$P(U \geq 0) \geq Q \tag{8}$$

де Q - деяке наперед задане число $(0 < Q < 1)$, (умова "кінцевого небанкрутства").

Якщо ставка страхової премії z забезпечує виконання умов (7) і (8) будемо називати її "достатньою". Через z_0 позначимо точну нижню грань величини z, таку величину будемо називати оптимальною страховою ставкою.

Для спрощення записів будемо вважати, що випадкова величина S розподілена так само, як і випадкова величина S_j, випадкова величина X – так само, як і випадкова величина X_j. Нехай випадкова величина S має не менше двох скінченних моментів.

Коефіцієнт варіації випадкової величини S позначимо символом V,

$$V^2 = \frac{DS}{(ES)^2} = \frac{ES^2}{(ES)^2} - 1.$$

Покладемо $H_j = S_j(z - I_j K_j)$, причому випадкові величини H_j незалежні і однаково розподілені. Тоді згідно з [4]

$$U = u_0 + \sum_{j=1}^{N} H_j$$

та для будь-якого u_0

$$P(U < x) = P(\sum_{j=1}^{N} H_j < x - u_0)$$

Символом $\Phi(x)$ будемо позначати стандартну нормальну функцію розподілу, а символом $\Psi(x)$ – функцію, обернену до функції $\Phi(x)$. Для спрощення будемо вважати, що $u_0 = 0$, N – стала величина, Y_j – задовольняють (1).

Тоді $U = \sum_{j=1}^{N} H_j$. Будемо припускати також, що N достатньо велика, щоб розподіл U апросктимувати нормальним законом.

Припустимо далі, що позови за договорами страхування є великими. Такі розміри виплат більш адекватно описуються випадковими величинами, які мають розподіли з «великими хвостами», до числа яких належить зокрема Логнормальний розподіл з параметрами $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Тоді якщо X має логнормальний розподіл, то

$$A = EX = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

$$B = \sqrt{DX} = \sqrt{\left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}}$$

Тоді при цих припущеннях для z_0 - оптимальної страхової ставки справедливе наступне співвідношення :

$$z_0 \sim e^{\mu+\sigma^2/2} + \frac{\sqrt{\left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}}\,[1+V^2]^{1/2}\Psi(Q)}{[N - V^2\Psi^2(Q)]^{1/2}}$$

Зауважимо також, що при V=0 даний результат практично зводиться до класичного [4,ст.238].

Отже, отримана формула дає асимптотику оптимальної страхової ставки у випадку F-моделі для відносних позовів розподілених за логнормальними розподілами. Зауважмо, що для розподілів Парето та Вейбула подібний результат отримано в [5] та [6].

Література:

1. Зінченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник. // Н. М. Зінченко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 224 с.
2. Леоненко М. М. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. // М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. – К. : Інформтехніка, 1995. – 380 с.
3. Білинський А. Оцінка ймовірності банкрутства у випадку виплат розподілених за субекспоненційними законами. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. Випуск 25, 2017. - С. 56-63
4. Королев В.Ю. Математические основы теории риска. // В.Ю.Королев, В.Е.Бенинг, С.Я.Шоргин , - М.: Физматлит. 2011, - 620с.
5. Чорний Р.О. Одна задача визначення оптимальної страхової премії / Чорний Р.О., Білинський А.Я. // Научные труди SWorld. – 2017 – випуск №47, Том 2. – С. 68 – 71
6. Чорний Р.О. Оцінка ймовірності банкрутства та оптимальна срахова ставка у випадку розподілу Вейбула / Р.О. Чорний, А.Я. Білинський, О.М. Кінаш // Modern Scientific Researches. – 2018 – Issue №5, Part 1 – С. 55 – 62.

References:

1. Zinchenko N.M. Mathematical methods in risk theory: a tutorial - publishing center "Kyiv University", - 2008.
2. Leonenko M. M. Theoretical-probabilistic and statistical methods in econometrics and financial mathematics / M. M. Leonenko, Yu. S. Mishura, V. M. Parkhomenko, M. Ya. Yadrenko. - Kyiv: Informtekhnika, 1995.
3. Bilinsky A. Assessment of the probability of bankruptcy in the event of payment distributed by subexponential laws.// Visnyk of the Lviv Univertsity. Series applied mathematics and computer science.
4. Korolev V.Y. Mathematical foundations of risk theory./ V.Y.Korolev, V.E.Bening, S.Y.Shorgin. – M.:Fizmatlit, 2011. – 620 p.
5. Chistyakov V.P. A theprem on sums of irv and its applications to branching processes /

V.P. Cgistyakov // Teor. Probabiliyu Appl. – 1969. –N 9 – P. 640-648.

6. Chornyy R.O. Evaluation of the bankruptcy probability and optimal insurance rate in case of weibull distribution / R.O. Chornyy, A.Ya. Bilynskyi, O.M. Kinash // Modern Scientific Researches. – 2018 – Issue №5, Part 1 – p. 55 – 62.

Abstract. *Considered the problem of the asymptotic probability of bankruptcy for large payments distributed by subexponential laws, especially in case of lognormal distribution. Also, it is found an asimptotic ratio for optimal insurance rate by implementing a row of assumptions in insurance model*

Key words: *asymptotics of the probability of bankruptcy, "heavy tails", subexponential distributions, insurance rate, lognormal distribution, factorization model*

Науковий керівник: канд.фіз.-мат.н., доц. Кінаш О.М.
Статья відправлена: 25.12.2018 г.