http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit25-02-050
DOI: 10.30890/2567-5273.2023-25-02-050

УДК 004.021

A METHOD FOR CONSTRUCTING LOGICAL CIRCUITS OF MINIMAL COMPLEXITY DESCRIBED BY SYMMETRIC FUNCTIONS BASED ON THEIR FUNCTIONAL DECOMPOSITION

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ МИНИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ, НА ОСНОВЕ ИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Paulin O.N./Паулин О.Н.
d.t.s., as. prof/д.т.н., доц.
ORCID: 0000-0002-2210-8317
National University «Odessa Politechnica», Odessa, Shevchenko av., 1, 65044
Национальный университет «Одесская политехника», Одесса, просп. Шевченко,1, 65044

Аннотация. *В работе решается проблема минимизации сложности логических схем (ЛС), описываемых симметрическими функциями (СФ), которые определяются несколькими индексами. Индексом называется количество единиц в наборах переменных СФ.*

Предлагается метод построения такой ЛС, который состоит из трёх этапов:

1. Проводится функциональная разделительная декомпозиция исходной СФ на подфункции; они строятся над подмножествами множества переменных СФ. Подфункции – это элементарные СФ, определяемые одним индексом.

2. Таблица заполняется значениями индексов подфункций путём их перебора; она минимизируется за счёт объединения определённых столбцов таблицы. Результат минимизации представляется в матричной форме для индексов.

3. Матричная форма переводится в дизъюнктивную нормальную форму для подфункций; строится ЛС в смешанном логическом базисе.

Этапы метода подробно раскрываются в примере; при этом показывается преимущество авторского подхода по сравнению с известным подходом.

Ключевые слова: *минимизация, логическая схема, симметрическая функция, индекс, метод, функциональная разделительная декомпозиция, подфункция, таблица индексов, объединение столбцов, матричная форма, дизъюнктивная нормальная форма, логический базис.*

Введение. Проблема построения оптимальных цифровых устройств (ЦУ) упирается в сложность их реализации, определяемой, в том числе, количеством переменных в описании поведения ЦУ. Причём зависимость выходной функции от количества входных переменных является экспоненциальной. Естественным способом справиться с этой проблемой является декомпозиция множества переменных на непересекающиеся подмножества [1]. Однако метод декомпозиции в [1] касается булевых функций (БФ), а в нашем случае рассматриваются симметрические функции (СФ) [2]. Известно, что СФ являются подклассом БФ, однако СФ обладают сильной спецификой по сравнению с БФ. Поэтому метод декомпозиции должен быть модифицирован к отмеченной специфике. В работе [3] предложен метод декомпозиции СФ на основе монотонного базиса. Такой подход имеет ограниченную область применения. Более приемлем метод, не привязанный к конкретному базису.

Цель работы – снижение сложности логической схемы ЦУ за счёт упрощения её описания на основе декомпозиции множества *n* переменных СФ на непересекающиеся подмножества без привязки к конкретному базису.

Основная часть.

Функциональной декомпозицией булевой функции (БФ) $f(X)$ называется [1] представление её в виде совокупности подфункций над подмножествами множества переменных $X\ \{x_1..x_n\}$:

$$f(X) = \varphi_0(X^0, \varphi_1(X^1), \ldots, \varphi_k(X^m)), \quad (1)$$

где X^i – подмножество (может быть пустым) множества переменных X (i=0..m); $\varphi_j(X^i)$ – булева подфункция, зависящая от множества переменных $X^i = \{x_{1i}..x_{ni}\}$.

В зависимости от значений параметров m и k, а также от способа разбиения множества X на подмножества X^i (i = 0..m) различают несколько видов функциональной декомпозиции. Для булевой функции с полной симметрией, т.е. симметрической функции (СФ) [2], мы будем использовать *разделительную* функциональную декомпозицию; в этом случае $X^i \cap X^j = \varnothing$, i, j=1..m; $i \neq j$. При этом нет необходимости выделять подмножество X^0.

Поскольку СФ – подмножество БФ, способ декомпозиции по (1) может быть применен и к СФ с учётом их специфики, а именно: обобщённое представление СФ в виде списка её индексов. *Индексом* СФ называется то количество единиц в наборе её переменных, при котором функция принимает значение 1. Над каждым подмножеством переменных строится своя подфункция, которая в данном случае является элементарной СФ, определяемой одним индексом. Тогда исходная СФ – это конъюнкция m подфункций, которая называется *симметрическим комплектом* (СК) $\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2...\widetilde{G}m$; в конкретном случае выражение для СК принимает вид

$$G_1(a_1)\&G_2(a_2)\&...\&G_m(a_m), \quad (2)$$

где a_i – индекс подфункции G_i, который может находиться в пределах от 0 до m_i, где m_i – число переменных в i-м подмножестве.

В общем случае исходная СФ может определяться несколькими индексами и СК строится для каждого её индекса отдельно.

Определение. *Совершенной декомпозиционной формой* (СДФ) будем называть дизъюнкцию СК.

СДФ имеет вид:

$$y = \bigcup_{i=1}^{p} H_n(a_i) = \bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{r_i}(\widetilde{G}_1 \cdot \widetilde{G}_2 \cdot ... \cdot \widetilde{G}_m)_j, \quad (3)$$

где a_i – индексы исходной СФ y, $G_1, \ldots, G_m$ – подфункции j-го СК, r_i – количество СК веса a_i.

Рассмотрим формулу (3) подробнее. В общем случае исходная СФ является составной, т.е. определяется p индексами a_i; соответственно она может быть представлена дизъюнкцией элементарных СФ, определяемая одним индексом (теорема Шеннона). Это первое равенство формулы (3). Во втором равенстве под вторым знаком объединения записаны СК, которые, во-первых, зависят от конкретного индекса исходной СФ, а во-вторых, определяются конкретным распределением индексов подфункций таких, что их сумма равна данному индексу исходной СФ.

Предложенный нами *метод* построения минимальной по сложности логической схемы (ЛС) заключается в следующем:

1. Проводится декомпозиция исходной СФ на подфункции по (1) с учётом специфики СФ. Для этого множество n переменных СФ разбивается на p подмножеств, включающих в себя по 2-4 переменных; выбор переменных для подмножеств не важен. Строятся подфункции G над подмножествами; это элементарные СФ. Конъюнкция подфункций образует СК, а дизъюнкция всевозможных СК образует СДФ.

2. Строится таблица из m строк (по числу подфункций) и множества столбцов. Столбцы заполняются индексами подфункций, при этом их сумма равна индексу исходной СФ. Варианты совокупностей индексов формируются направленным перебором при фиксации индекса некоторой подфункции и перебором вариантов индексов остальных подфункций.

Проводится минимизация СДФ, для чего столбцы таблицы объединяются. Индексы склеиваются, если в объединении собираются все возможные их значения для некоторой подфункции, что обозначается символом X; тогда эта подфункция становится тождественно равной 1. Лучшим является такой результат объединения, при котором количество склеиваний максимально. Перебираются все варианты выбора основной подфункции и путём сравнения находится минимальное значение СДФ. Результат представляется в матричной форме.

3. Матричное представление минимизированной СДФ относительно индексов преобразуется в дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) относительно элементарных СФ. По ДНФ строится ЛС стандартным образом, при этом подфункции рассматриваются как новые переменные, которые должны быть предварительно реализованы в виде отдельных подсхем.

Пример. Построим схему порогового устройства, имеющего 9 входов $x_1..x_9$ и порог, равный 2; в обозначениях для СФ такое устройство имеет вид $H_9(\geq 2) = H_9(2, 3, \ldots, 9)$. Разобьем 9 входных переменных на 3 подмножества по 3 переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_7, x_8, x_9\}$; введем над ними подфункции G_1, G_2, G_3. В данном случае индекс подфункции может находиться в пределах $0 \leq a \leq 3$; индекс b $(2 \leq b \leq 9)$ исходной СФ определяется суммой индексов подфункций, $b=a_1+a_2+a_3$. Организуем упорядоченный (например, в порядке возрастания индексов подфункций) перебор индексов a подфункций так, чтобы сумма их индексов давала конкретный индекс b исходной СФ и занесём значения индексов в табл. 1 (приведены 6 начальных и 4 последних из 60 возможных вариантов перебора; остальные варианты легко восстановить).

Далее произведём "склеивание" индексов СФ, которое заключается в следующем. Операцией *склеивания* двух наборов БФ называется исключение в результирующем наборе переменной x_i из множества существенных переменных, входящих в эти наборы, в соответствии с тождеством: $y!x_i \vee yx_i = y$.

В вырожденном случае, когда БФ тождественно равна 1 (на всех наборах функция равна 1), все переменные склеиваются. В случае СФ этой ситуации соответствует наличие всех индексов $(0 \leq a \leq n)$; обозначать эту ситуацию мы будем символом X, так что $G(\mathrm{X}) \equiv 1$. Например, в табл. 1 последние 4 варианта в результате "склеивания" дадут | 3 3 X|.

Таблица 1 - Варианты весов подфункций *G*

G_1	0	0	0	0	0	0	…	3	3	3	3
G_2	0	0	1	1	1	2	…	3	3	3	3
G_3	2	3	1	2	3	0	…	0	1	2	3

Авторская разработка

Проведём подобные "склеивания" по всей таблице. Первые 2 столбца таблицы образуют множество *A* индексов подфункций *G*; они объединяются в строку *A* = |0 0 2,3|. Следующие 3 столбца объединяются в строку *B* = |0 1 1-3|. Следующие 8 столбцов объединяются в строку *C* = |0 2,3 X|. Следующие 3 столбца объединяются в строку D = |1 0 1-3|. Следующие 12 столбцов объединяются в строку *E* = |1 1-3 X|, а последние 32 столбца объединяются в строку *F* = |2,3 X X|.

Проведём далее 2-й этап склеивания элементов множеств *A*..*F*. Отметим, что множества *C* и *F* уже могут быть занесены в результирующие матрицы, в которых строкам соответствуют варианты индексов подфункций *G*, а столбцам соответствуют наборы индексов для функций G_1, G_2, G_3. При этом для каждой матрицы значения индексов функции G_1 фиксируется.

Отметим также, что некоторые варианты могут входить в разные множества. Так, множества *A*, *B*, *C* имеют общую часть $G_1 = 0$, $G_3 = 2{,}3$, а в результирующем множестве G_2 имеются все значения *a*, *a*≡X, т.е. в результате получаем строку |0 X 2,3|. В результате объединения *B* и *C* получим множество |0 1-3 1-3|, что может быть представлено в виде множеств: |1 !0 X| и |1 X !0|, поскольку множеству индексов 1-3 соответствует инверсия значения 0, т.е. !0.

Собираем отдельные результаты в компактное матричное представление:

$$H_9(\geq 2) = \begin{vmatrix} 0 & X & 2{,}3 \\ 0 & 2{,}3 & X \\ 0 & \bar{0} & \bar{0} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 1 & \bar{0} & X \\ 1 & X & \bar{0} \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 2{,}3 & X & X \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Здесь запись 2,3 означает, что *G*=1 при значениях индексов, равных 2 или 3; !0 означает инверсию значения функции *G* при значении индекса, равного 0, т.е. !*G*(0); индекс *G* при этом равен 1, 2, 3. Строки матрицы – это варианты решения, столбцы матрицы – это индексы подфункций G_1, G_2, G_3. Объединение проведено по столбцам с фиксацией индекса по G_1.

Матричное представление (4) является минимизированным аналитическим описанием функционирования заданного порогового устройства. Запишем его в дизъюнктивной нормальной форме. Имеем:

$$Y=G_1(0)(G_2(2,3)\vee G_3(2,3))\vee G_1(0)!G_2(0)!G_3(0))\vee G_1(1)(!G_2(0)\vee !G_3(0))\vee G_1(2,3) \qquad (5)$$

Обозначим (*i*=1..3):

M_i – функции *мажоритарность*;

$z_i = G_i(1,2,3)$ – функции *или*.

Учтём, что

$!G_i(0) = G_i(1,2,3) = z_i$;

$G_1(1) = !G_1(0)!G_1(2,3) = z_1!M_1$;

$y!x \vee x = y \vee x$ – это формула простого поглощения;

$!z_1z_2\, z_3 \vee z_1(z_2 \vee z_3) = z_1z_2 \vee z_1z_3 \vee z_2z_3$ – это формула обобщённого поглощения;

$z_1z_2 \vee z_1z_3 \vee z_2z_3 = M_4$ – функция *мажоритарность*.

Тогда (5) примет вид:

$$H_9(\geq 2) = M_1 \vee !z_1(M_2 \vee M_3) \vee M_4 \tag{6}$$

По (6) построена схема в смешанном базисе, включающем в основном функцию *мажоритарность* (рис. 1).

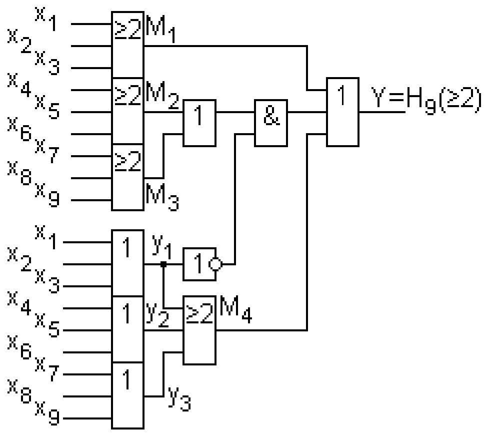

Рис. 1 – Функциональная схема для порогового элемента

Авторская разработка

Сравним синтезированную по предложенному методу схему со схемой, построенной по методу [3], в сопоставимом базисе 2И-НЕ по следующим параметрам: количество элементов, глубина схемы и цена по Квайну. Имеем для схемы на рис. 1 соответственно 54, 12, 85, а для схемы из [3] – 59, 13, 104.

Лучшие значения параметров схемы по рис. 1 объясняются тем, что предложенный метод более полно учитывает симметрию входных переменных.

Заключение и выводы.

В работе предложен метод построения минимальной по сложности ЛС, которая описывается СФ. Метод основан на функциональной разделительной декомпозиции и модифицирован с учётом специфики СФ относительно БФ.

Метод включает в себя 3 этапа: декомпозиция множества переменных исходной СФ; заполнение таблицы индексами подфункций в процессе направленного их перебора, при этом сумма индексов подфункций равна конкретному индексу исходной СФ; минимизация таблицы путём объединения столбцов. Результат представляется матрицами индексов и далее переводится в ДНФ, по которой строится стандартным образом ЛС.

Подробно рассмотрен пример применения данного метода. Показано его преимущество относительно известного метода – снижение на 18% сложности полученной схемы, выраженной в сопоставимом базисе на элементах 2И-НЕ.

Список литературы:

1. Логическое проектирование БИС/В.А. Мищенко, А.И. Аспидов, В.В. Витер и др.: Под ред. В.А. Мищенко. – М.: Радио и связь, 1984. – 312 с.

2. Паулин О.Н. Основы теории симметрических булевых функций. – Саабрюкен, Германия: LAMBERT Academic Publisher, 2013. – 66 с.

3. Авгуль Л.Б. Декомпозиция симметрических булевых функций и булевых функций с частичной симметрией в базисе монотонных функций / Л.Б. Авгуль, А.С. Петроченко // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 3. – С. 26–40.

Referents

1. Logicheskoe proektirovanie BIS/V.A. Mischenko, A.I. Aspidov, V.V. Viter dr.: Pod red. V.A. Mischenko. – M.: Radio I sv'az', 1984. – 312 s.

2. Paulin O.N. Osnovy teoriyi simmetricheskih bulevyh funktsiy. – Saabr'uken, Germaniya: : LAMBERT Academic Publisher, 2013. – 66 s.

3. Avgyl' L.B. Dekompozitsiya simmetricheskih bulevyh funktsiyb I bulevyh funktsiy s chastichnoy simmetrieyi v bazise monotonnyh funktciy/ L.B. Avgyl', A.S. Petrochenko//Kibernetika i sistemnyy analiz. – 1998. – № 3. – S. 26–40.

***Abstract**. The paper solves the problem of minimizing logical circuits (LC) described by arbitrary symmetric functions (SF), which are defined by several indices. The index is the number of units in the sets of SF variables.*

A method for constructing such a LC is proposed, which consists of three stages:

1. A functional separation decomposition of the original SF into subfunctions is carried out; they are constructed over subsets of the set of SF variables. Subfunctions are elementary SFs defined by a single index.

2. The table is filled with subfunction index values by iterating over them; it is minimized by concatenating certain columns of the table. The minimization result is presented in matrix form.

3. The matrix form for indices is translated into disjunctive normal form for subfunctions; LC is built in a mixed logical basis.

The steps of the method are detailed in the example; at the same time, the advantage of the author's approach in comparison with the known approach is shown.

***Keywords:** minimization, logic circuit, symmetric function, index, method, functional separation decomposition, subfunction, index table, column union, matrix form, disjunctive normal form, logical basis.*

Статья отправлена 18.02.2023 г.