http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit25-02-080
DOI: 10.30890/2567-5273.2023-25-02-080

УДК 004.021

METHOD AND ALGORITHM FOR FORMATION AND FILLING OF THE FUNCTIONING TABLE OF A MULTY-BIT MULTY-OPERAND ADDER

МЕТОД И АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ И ЗАПОЛНЕНИЯ ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МНОГОРАЗРЯДНОГО МНОГООПЕРАНДНОГО СУММАТОРА

Paulin O.N./Паулин О.Н.
d.t.s., as. prof/д.т.н., доц.
ORCID: 0000-0002-2210-8317
Nikitchenko M.I./Никитченко М.И.
PhD student/аспирант
National University «Odessa Politechnica», Odessa, Shevchenko av., 1, 65044
Национальный университет «Одесская политехника», Одесса, просп. Шевченко,1, 65044

Аннотация. *В статье предлагаются метод и алгоритм формирования и заполнения таблицы функционирования (ТФ) многоразрядного многооперандного сумматора (ММС).*

ММС – инструмент обработки больших потоков данных на основе операции свёртки многорядных арифметических двоичных кодов (МРК), которая является обобщением операции сложения. ММС – устройство сложения множества бит n операндов, которые образуют область бит (ОБ), в общем случае произвольную. Разрядным срезом (РС) ОБ называется множество m его бит, расположенных на вертикальной линии, обозначающей данный разряд. РС – это конкретный набор значений переменных функции. Эффективная обработка многих рядов кодов возможна только с использованием СФ благодаря тому, что индекс СФ (её аргумент) является инвариантом для множества наборов значений переменных. Индекс – это число a, равное количеству единиц в наборах значений n переменных СФ, при которых она принимает значение 1. Это означает, что неважно расположение единичных бит в наборах (в РС), а важно количество единиц a в наборе; важно также выполнение условия: количество таких наборов равно числу сочетаний из n по a.

Таблица функционирования ММС (ТФ) – это особая таблица, которая заполняется значениями индексов СФ. ТФ – совокупность поразрядных подтаблиц, число которых равно сумме n разрядов сумматора и k разрядов переноса. Для формирования заголовка ТФ и самой таблицы, а также её заполнения используется редактор таблиц Excel.

Разрабатываются метод и алгоритм формирования ТФ. В их основе лежат разрядные счётчики; они вычисляют a такое, что СФ суммы S(a) и переноса P(a) равны 1. Особенность функционирования счётчика – должно выдерживаться соотношение $a \le m$, где m – максимально возможное значение единичных бит в данном РС.

Рассматривается схемотехническая реализация описания нетрадиционного сумматора.

Ключевые слова: *метод, алгоритм, таблица функционирования, многоразрядный многооперандный сумматор, операция свёртки, область бит, разрядный срез, симметрическая функция, индекс, инвариант, набор значений переменных, разрядный счётчик, схемотехническая реализация.*

Вступление.

Описание функционирования и построения цифровых устройств (ЦУ) за время их существования претерпело значительные изменения в части представления данных.

Известные уровни представления данных можно показать в виде последовательного обобщения формы представления описания ЦУ: **биты** (двоичные данные) – **наборы бит** (в таблице истинности) – **десятичные эквиваленты наборов** (ДЭН – десятичное число для одного набора) – **троичная матрица** с расширенным набором элементов: 0, 1, –.

Эти представления обладают общим недостатком – малая наглядность и громоздкость. Так, таблица истинности при числе переменных более шести становится трудно обозримой.

Отсюда вытекает важность и актуальность разработки нового подхода к описанию сумматоров, умножителей, построенных на их основе, и других устройств, которые используют суммирование двоичных данных, например, при кодировании и декодировании. Во всех этих случаях нужны таблицы нового типа, позволяющие повысить уровень обобщения данных.

Цель работы – повышение уровня обобщения описания ЦУ на примере нестандартных сумматоров за счёт таблиц функционирования.

Для достижения этой цели решаются следующие **задачи:**

- выбор подходящего аппарата для описания нестандартных сумматоров;
- представление описания в виде таблицы функционирования (ТФ);
- разработка метода заполнения ТФ;
- разработка алгоритма, реализующего разработанный метод.

Основная часть.

Симметрические функции.

Следующим шагом относительно известных приёмов обобщения представления данных является переход к *числовому представлению* множества наборов переменных, обладающих свойством инварианта. Таким свойством обладают симметрические функции (СФ). Суть предложенного автором подхода состоит в использовании алгебры СФ [1] при описании функционирования многоразрядных многооперандных сумматоров (ММС).

СФ – это подкласс булевых функций (БФ) с тем отличием, что аргумент СФ – это число a единиц в наборе из n переменных, при которых функция принимает значение 1. Этот аргумент называется индексом; число a – *инвариант* для совокупности C^a_n наборов переменных.

В теории СФ используется то важнейшее их преимущество по сравнению с БФ, что логические операции над СФ сводятся к соответствующим операциям над множествами их индексов. Наличие симметрии в сложных функциях позволяет компактно их представить своими индексами.

Многоразрядные многооперандные сумматоры.

ММС – инструмент для обработки больших потоков данных, которая заключается в *свёртке* многорядных арифметических двоичных кодов (МРК) как обобщения операции сложения. Свёртка МРК приводит к однорядному коду результата. ММС – устройство сложения множества бит определённого числа операндов. Это множество бит образует *область бит* (ОБ), в общем случае произвольную. Такая ситуация поддаётся свёртке только при использовании СФ благодаря тому, что индекс СФ является инвариантом для множества наборов. Это означает, что неважно расположение единичных бит в наборах, а важно количество единиц в наборе. *Разрядным срезом* (РС) называется вертикальное сечение ОБ; при этом нас интересуют значения тех бит, которые попали в это сечение. Количество *a* единичных бит используется в качестве индексов СФ; *a* может принимать значения в пределах 0.. *m*, где *m* – количество бит в данном РС.

Пример. Рассмотрим двоичный одноразрядный полный сумматор (рис. 1), на вход которого поступают значения слагаемых *a* и *b*, а также входного переноса *c*; на выходе сумматора формируются значения суммы *S* и выходного переноса *P*. Функционирование данного сумматора описывается табл. 1, которая представляет собой таблицу истинности (ТИ).

Из табл. 1 видно, что имеется симметрия входных переменных *a, b, c* сумматора, что определяется их "равноправием" относительно реакции сумматора: действительно, при любой перестановке переменных значения функций *S* и *P* не изменяются. Симметрия входных переменных позволяет использовать СФ в описании сумматора в виде таблицы его функционирования (табл. 2; *e* – индекс СФ).

Таблица 1 - Таблица истинности

A	*b*	*c*	*P*	*S*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Таблица 2 - Описание сумматора

e	*P*	*S*
0	0	0
1	0	1
2	1	0
3	1	1

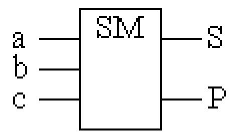

Рисунок 1 – Одноразрядный полный сумматор

Авторская разработка

Из табл. 2 следует, что сумма $S = H_3(1, 3)$, а перенос $P = H_3(2, 3)$. Легко видеть, что сумма – это функция *нечётность* трёх переменных, а перенос – функция *мажоритарность* трёх переменных с порогом 2.

Таким образом, описание сумматора (табл. 2) приняло компактный вид.

Будем оценивать *компактность* таблицы её количеством строк. Тогда повышение компактности при переходе от ТИ к ТФ, содержащей индексы СФ, будет определяться выражением $\gamma=2^n/(n+1)$. В данном примере $\gamma=2$.

С увеличением *n* растёт γ, причём растёт значительно быстрее, чем *n*.

Таблица функционирования (ТФ) устройства.

В качестве устройства ниже рассматривается нестандартный сумматор – ММС. Таблица функционирования (ТФ) сумматора – это таблица, в которой в особой форме представлены числа, характеризующие его функционирование.

ТФ – это объединение *n* + *k* поразрядных отдельных таблиц (подтаблиц), где *n* – разрядность сумматора, *k* – разрядность переноса. Подтаблица – это множество строк, значения элементов которых таковы, что все поразрядные СФ равны 1. Ясно, что равна 1 их конъюнкция, т.е. симметрический комплект (СК) для строки. Полное описание подтаблицы – это дизъюнкция СК всех строк.

ТФ могут использоваться не только для описания функционирования устройства, но и в качестве исходных данных для схемотехнического проектирования устройства.

Для построения ТФ используется редактор таблиц Excel. При этом решаются 2 проблемы: создание динамической таблицы (неизвестно, сколько строк будет в конечном варианте ТФ) и формирование сложного заголовка.

Отметим достоинства ТФ: компактность, наглядность, естественность, удобство использования.

Метод и алгоритм построения и заполнения ТФ.

Предложенный нами метод построения ТФ сумматора состоит в следующем:

1) разработка таблицы особой формы – формирование заголовка таблицы, в котором перечисляются выходные функции сумматора и его разряды;
2) представление выходных функций сумматора в виде СФ;
3) заполнение таблицы по предложенному алгоритму такими числами (индексами СФ), что их совокупность даёт 1 на соответствующем выходе сумматора, описанного СФ.

Отметим, что построение описания для суммы и переноса одинаково с тем отличием, что для суммы i-го разряда нужна информация об индексах i разрядов, а для переноса – всех n разрядов.

Алгоритм заполнения ТФ.

Алгоритм включает в себя 3 этапа: подготовительный, основной и заключительный; последний выполняется дважды.

Структуры данных

T_i – i-я подтаблица ТФ;
n, k – разрядности суммы и переноса соответственно;
i, j, l – параметры циклов перебора подтаблиц, разрядов и позиций вектора состояний счётчиков;
a – текущее значение разрядного счётчика, это же – разрядный индекс СФ;
m – максимальное значение количества бит в РС операндов сумматора;
$V_р$ – вектор поразрядного распределения m бит операндов сумматора;
$V_т$, $V'_т$ – текущие (данный и предыдущие) вектора подтаблицы, элементы которого – разрядные индексы a СФ; это же - строки подтаблицы;
$V_с$ – двоичный вектор состояния разрядных счётчиков; при максимальном значении счётчика l-го разряда этот вектор устанавливается в 1 ($V_с[l]$:=1).

Подготовительный этап

- ввод с клавиатуры по запросу программы n элементов вектора $V_р$;
- вычисление суммы максимальных операндов $Q_м$ по значениям элементов вектора $V_р$, перевод $Q_м$ в двоичное представление и определение количества k переносов;
- формирование заголовка ТФ в редакторе таблиц Excel.

Основной этап.

1. Перебор подтаблиц.

1.1. Обнуление всех $n+k$ разрядных счётчиков.

1.2. Цикл по i (i=1..n+k).

2. Заполнение подтаблицы T_i.

2.1. Вызов подтаблицы T_i из Excel.

2.2. При заполнении подтаблицы T_i для суммы i-го разряда используются данные от 1-го разряда по i–й, а для переноса – данные всех n разрядов.

2.2. Цикл по a (инкремент a; проверка: $a \le m$? В случае ДА продолжаем заполнение подтаблицы, иначе переход на конец цикла по a).

2.3. Присвоение значения a j-му элементу текущего вектора ($V_т[j] := a$)/

2.4. Вычисление суммы Q_{10} элементов текущего вектора, которая затем переводится в двоичное представление Q_2.

2.5. Если $Q_2[i]$ равно 1, то вектор $V_т$ записывается в ТФ; инкремент N; N заносится в подтаблицу.

2.6. Конец цикла по a.

2.7. Проверка заполненности всех счётчиков по вектору V_c. В случае НЕТ продолжается цикл по j иначе конец цикла по j.

3. Обнуление счётчиков.

3.1. $l := 1$; цикл: пока $V_c[l]:=1$, выполнять $\{a:=0;\ V_c[l]:=0;\ l := l + 1;\}$.

3.2. $j := 1$; переход на п. 2.2 (запускаем счётчик 1-го разряда).

Конец цикла по j

Заключительный этап (объединение строк)

- Перебор подтаблиц в цикле по i (i=1..n+k).

- Формирование пар текущих векторов $V_т$ и $V'_т$: начальное значение N=1; цикл по N: инкремент N; для каждого N ставим в пару по очереди все предыдущие строки, начиная с 1-й.

- Сравниваем поразрядно (цикл по j, $j \le i$?) значения векторов $V_т$ и $V'_т$. Если имеется отличие только в одном разряде (счётчик несовпадений, проверка $Сч_{н/с} = 1$?), то значения в этом разряде объединяются по Правилам:

- при объединении нескольких значений они записываются через запятую;
- в случае наличия всех возможных значений a записывается X.

- При объединении результат приписывается младшей по номеру строке, данная строка удаляется, а все последующие номера уменьшаются на 1.

Конец заключительного этапа.

Конец алгоритма.

3.3. Если $a = m$, то вектору состояния счетчика присваивается 1 ($V_c[j]:=1$).

4. Обнуление счётчиков.

4.1. $l := 1$; организуем цикл по условию: (если $V_c[l]:=1$ то $a:=0$; $V_c[l]:=0$).

4.2. $j := l + 1$; переход на п. 2.2.

5. Проверка заполнения подтаблицы: $j \le i$? Если ДА, то процесс заполнения подтаблицы продолжается, иначе переход на п. 2.2.

//Для этого надо в цикле по l, l = 1..i проверить, все ли **подряд** a равны m?

6. Конец.

Схемотехническая реализация на основе ТФ.

Ниже приведена ТФ для двухразрядного трёхоперандного сумматора (табл. 3), описываемого вектором распределения V_p = [3 3]. Она построена программой, в основе которой лежит предложенный алгоритм.

Таблица 3 – Описание двухразрядного трёхоперандного сумматора

N п\п	$S_4=P_2$		$S_3=P_1$		S_2		S_1
	2р	1р	2р	1р	2р	1р	1р
1	3	2,3	1	2,3	1,3	0,1	1,3
2			2	X	0,2	2,3	
3			3	0,1			

Авторская разработка

ТФ – это совокупность подтаблиц со своими строками, в ячейках которых размещены значения индексов СФ определённого разряда. Так, в 1-й строке подтаблицы 2 (S_2) для 1-го разряда записаны индексы 0,1. Эту запись надо понимать следующим образом: это индексы некоторой СФ, которая равна 1 при этих значениях индексов. Для полного описания 2-й строки надо учесть СФ и для 2-го разряда, причём строка описывается конъюнкцией поразрядных СФ. Тогда 1-я строка может быть записана как $R_1=H^2{}_3(1,3)\wedge H^1{}_3(0,1)$; здесь верхние индексы в обозначениях СФ – это номера разрядов, а нижние индексы – это количество переменных данной СФ. Для полного описания функции суммы 2-го разряда надо аналогично представить все строки подтаблицы и объединить их дизъюнкцией: $S_2 = R_1\vee R_2 = H^2{}_3(1,3)\wedge H^1{}_3(0,1)\vee H^2{}_3(0,2)\wedge H^1{}_3(2,3)$. Это и есть описание функции суммы 2-го разряда.

В свою очередь, СФ можно представить в ДНФ относительно своих переменных x_1, x_2, x_3. Так, СФ, которая определяется индексами 2,3, можно представить в ДНФ в виде $H_3(2,3) = !x_1x_2x_3\vee x_1!x_2x_3\vee x_1x_2!x_3\vee x_1x_2x_3 = x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$.

Итак, логическая схема, построенная по данным ТФ, реализуется двумя ярусами: на первом ярусе формируются СФ по своим переменным, а на 2-м ярусе СФ объединяются в ДНФ в соответствии со структурой ТФ.

Заключение. Предложенное в работе понятие *таблица функционирования* (ТФ) основано на следующих идеях и терминах, связанных с понятием *многоразрядный многооперандный сумматор* (ММС) и его наполнением. Это, прежде всего, понятие *свёртка* МРК как обобщение операции сложения. Далее

идут понятия *симметрическая функция* (СФ), как подкласс класса булевых функций, и её *индексы* (аргументы), которые указывают на то количество единичных бит операндов, при которых СФ принимает значение 1.

Отметим, что представление информации в ТФ в виде индексов СФ является самым высоким на текущий момент уровнем обобщения данных.

Следующим является понятие *область бит* (ОБ), объединяющая все биты операндов описываемого сумматора; ОБ может быть принципиально произвольной; описание такой ситуации эффективно только при использовании СФ. *Разрядным срезом* называется совокупность бит в вертикальном сечении ОБ по данному разряду. Обычно ОБ разбивают на *фрагменты*; в практике удобнее использовать *регулярные фрагменты*: прямоугольники, треугольники, параллелограммы (ромбы). ОБ описывается *распределением бит по разрядным* *срезам*. Такое распределение является необходимым и достаточным в качестве исходных данных для описания таблицей функционирования ММС.

ТФ может использоваться для дальнейшего перехода к ДНФ и её схемотехнической реализации.

Преимуществом нашего подхода являются естественность, компактность и наглядность представления описания функционирования ММС в виде ТФ.

Программа, реализующая данный алгоритм и библиотека заготовленных выражений для СФ могут существенно сократить время проектирования нестандартных сумматоров.

Литература.

1. Паулин О.Н. Основы теории симметрических булевых функций. – Саарбрюкен/Германия: Lambert Academic Publishing, 2013. – 66 с.

2. Паулин О.Н. О параллельной обработке потока данных, адаптированной к области бит произвольной конфигурации / О.Н. Паулин // Искусственный интеллект. – № 3. – 2010. – Донецьк: ІПШІ, "Наука і освіта", 2010. – С. 127-133.

References

1. Paulin O.N. Osnovy teoriyi simmetricheskih bulevyh funkciy. – Saarbryuken/ Germany: Lambert Academic Publishing, 2013. – 66 s.

2. Paulin O.N. O parallelnoy obrabotke potoka dannyh, adaptirovannoy k oblasti bit proizvolnoy konfiguraciyi/ O.N. Paulin//Iskusstvennyy intellect. – № 3. – 2010. – Donetsk: IPII, “Nauka i osvita”, 2010. – S. 127-133.

Abstract: *The article proposes a method and algorithm for formation and filling the* functioning *table (FT) of a multi-bit multi-operand adder (MMA). The MMA is a tool for processing large data streams based on the convolution operation of multi-bit binary arithmetic codes (MC), which is a generalization of the addition operation. The MMA is a device for adding multiple n-bit operands that form a bit field (BF), which is generally arbitrary. A slice of the BF consisting of m bits located on a vertical line representing a particular bit is called a bit slice (BS). A BS is a specific set of variable function values. Effective processing of many rows of codes is only possible using SF because the index of SF (its argument) is an invariant for the set of variable value sets. The index is a number a equal to the number of ones in the sets of values of n variables of SF when it takes the value 1. This means that the location of the ones in the sets (in BS) does not matter, but the number of ones a in the set is important; it is also important to satisfy the condition: the number of such sets is equal to the number of combinations of n by a.*

The function table of the MMA (FT) is a special table that is filled with the values of SF indices. The FT is a set of bit-by-bit sub-tables, the number of which is equal to the sum of n adder bits and k carry bits. To create the header and the table itself, as well as to fill it, an Excel table editor is used.

A method and algorithm for forming the FT are developed. They are based on bit counters; they calculate a such that the SF of the sum S(a) and carry C(a) are equal to 1. The feature of the counter operation is that the relationship a ≤ m must be maintained, where m is the maximum possible value of ones in the given BS.

A schematic implementation of the description of a non-traditional adder is considered.

Keywords: *method, algorithm, function table, multi-bit multi-operand adder, convolution operation, bit field, bit slice, symmetric function, index, invariant, variable value set, bit counter, schematic implementation.*

Отправлено 24.02.23