



УДК 528.48

ANALYTICAL DESIGN OF THE LINEAR STRUCTURE PROFILE
АНАЛІТИЧНЕ ПРОЄКТУВАННЯ ПРОФІЛЮ ЛІНІЙНИХ СПОРУД**Radov S.G. / Радов С.Г.***s.t.s., as.prof. / к.т.н., доц.*

ORCID: 0009-0003-5721-996X

Kuznetsova O. V. / Кузнецова О.В.*senior lecturer / старший викладач*

ORCID: 0009-0006-2189-7306

Cherkasy State Technological University,

Cherkasy, Shevchenko boulevard 460, 18006

Черкаський державний технологічний університет,

м. Черкаси, бульвар Шевченка 460, 18006

Анотація. Стаття присвячена оптимізації проектного профілю лінійних споруд аналітичними методами за основними критеріями оптимальності (мінімізація робочих позначок, баланс і мінімум земляних робіт, граничне значення проектного ухилу). Розглянуто аналітичне проектування методами найменших квадратів та квадратичного програмування. Розроблено методику врівноваження проектних позначок точок перегину профілю, в тому числі з урахуванням вагових коефіцієнтів впливу робочих позначок на баланс земляних робіт. Показано, що для врахування додаткових умов оптимізації щодо суми робочих позначок та граничного ухилу, доцільно використовувати метод квадратичного програмування. Наведені приклади аналітичного проектування повздожнього профілю ділянки автомобільної дороги.

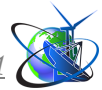
Ключові слова: лінійна споруда, повздожній профіль, робоча позначка, критерії оптимальності, метод найменших квадратів, метод квадратичного програмування.

Вступ.

У практиці проектування лінійних споруд використовується, як правило, графоаналітичний спосіб з поступовим наближенням до прийнятних проектних рішень. Аналітичний спосіб є більш перспективним для автоматизації процесу проектування, забезпечення критеріїв оптимальності та точності розрахунків.

Дослідження аналітичного проектування профілю лінійних споруд наведені в працях [1,2,3,4] та інших. В праці [4] наводиться методика врівноваження робочих позначок методом найменших квадратів, але без забезпечення балансу земляних робіт. В статті [3] запропоновано складний алгоритм послідовних наближень для проектування профілю із забезпеченням балансу та мінімуму площ насипу і виїмки ґрунту вздовж траси. В працях [1,2] найбільш повно розглянуте аналітичне проектування робочих позначок з додержанням балансу і мінімуму площ насипу і виїмки та з урахуванням різних критеріїв оптимальності і вагових коефіцієнтів, яке ґрунтується на наближеному визначенні проектних ухилів і позначок центрів тяжіння ділянок профілю.

В основу аналітичного проектування повздожнього профілю лінійних споруд покладено оптимізацію методами найменших квадратів (МНК) та квадратичного програмування (МКП) цільових функцій $F = f(r)$ від робочих позначок (r_i), які залежать від фактичних (H_i) та проектних (Z_i) позначок рельєфних точок (рис. 1)



$$r_i = Z_i - H_i \quad (i=1,2,\dots,n). \tag{1}$$

В залежності від вигляду цільової функції прийнято розділяти наступні способи оптимізації [1, с. 108]:

а) мінімізації робочих позначок – $F = \sum r^2 = \min$;

б) мінімізації балансових робочих позначок – $F = \sum pr^2 = \min$, де p – коефіцієнт впливу робочої позначки на баланс земляних робіт.

Крім додаткових умов оптимізації $\sum r = 0$ та $\sum pr = 0$ метод квадратичного програмування дозволяє задавати граничне значення (u_{zp}) проектних ухилів (u) на профілі у вигляді нерівності $|u| \leq |u_{zp}|$.

Узагальнення досвіду використання різних технологій для інженерно-геодезичного проектування лінійних об'єктів зумовлює необхідність застосування строгого способу оптимізації проектних рішень з можливістю автоматизації.

Метою статті є розробка алгоритму оптимізації проектного профілю лінійних споруд аналітичними методами.

Результати і пояснення.

Проектування починається з побудови фактичного повздовжнього профілю (рис. 1) та встановлення ділянок з однаковим проектним ухилом між точками з локальними екстремальними значеннями фактичних позначок (наприклад, ділянки 1-5, 5-9 та 9-12).

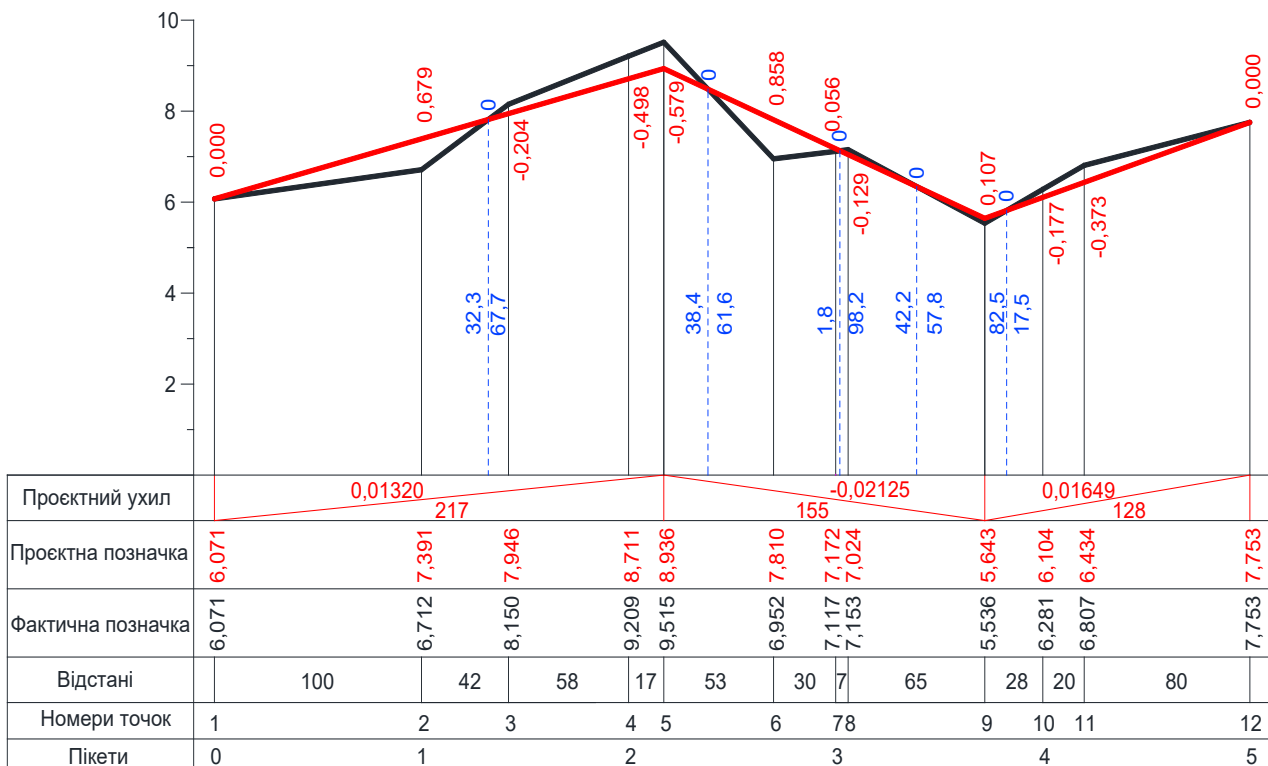
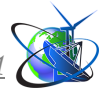


Рисунок 1 – Повздовжній профіль лінійної споруди при $\sum pr^2 = \min$.

Проектний ухил на окремій ділянці профілю (рис. 2) визначається за формулою:



$$u_j = \frac{Z_{j,k} - Z_{j,0}}{D_j}, \tag{2}$$

де $Z_{j,0}$ та $Z_{j,k}$ – проєктні позначки початкової та кінцевої точок j ділянки профілю ($j=1,2,3,\dots,m$) з проєктним ухилом u_j ; m – кількість ділянок профілю з однаковим нахилом; $(k+1)$ – кількість точок ($i=0,1,2,\dots,k$) на j ділянці профілю; $D_j = X_{j,k} - X_{j,0}$ – довжина j ділянки профілю; $X_{j,k}$ – пікетажне положення відповідної точки профілю.

Проєктні позначки ($Z_{j,i}$) проміжних точок ділянки профілю визначаються за проєктною позначкою ($Z_{j,0}$) початкової точки відповідної ділянки з ухилом u_j (рис. 2):

$$Z_{j,i} = Z_{j,0} + u_j x_{j,i}, \tag{3}$$

де $x_{j,i} = X_{j,i} - X_{j,0}$ – віддалення поточної точки від початкової точки j ділянки профілю з однаковим ухилом ($i=1,2,3,\dots,k$).

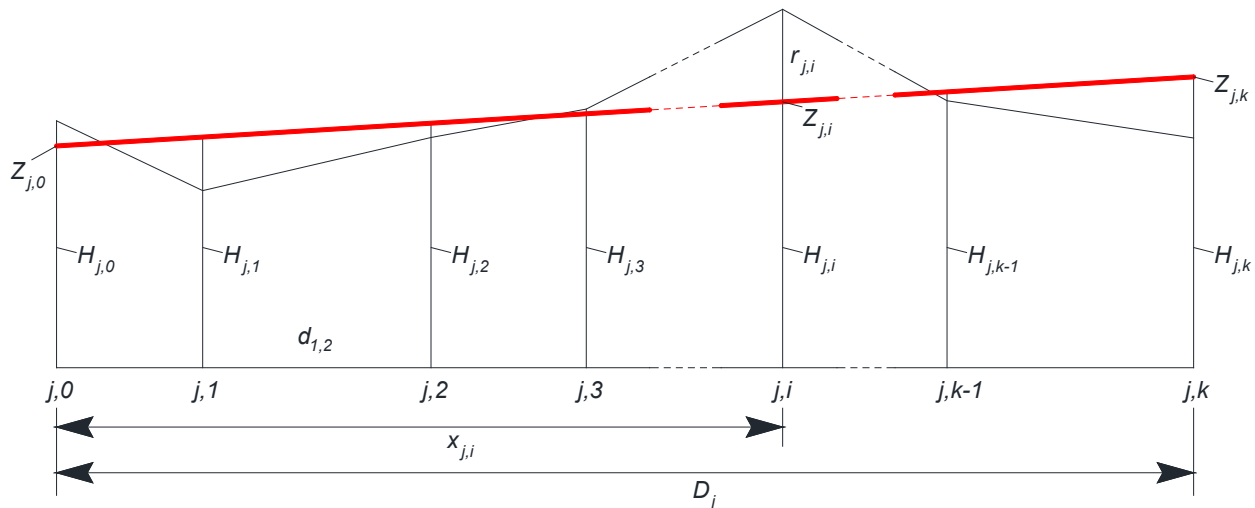


Рисунок 2 – Ділянка профілю з однаковим повздовжнім ухилом.

Позначення: j – номер ділянки; D_j – довжина ділянки; i ($i=1,2,\dots,k-1$) – номери проміжних точок на ділянці; $x_{j,i}$ – віддалення поточної точки від початку ділянки; $d_{i,i+1}$ – відстань між суміжними точками профілю.

Одним з критеріїв оптимальності проекту лінійної споруди є баланс земляних робіт. Якщо прийняти, що ширина лінійної споруди приблизно однакова на усіх ділянках, то баланс площ насипу (S_H) та виїмки (S_B) на повздовжньому профілі призводить до балансу земляних мас (ΔS):

$$\Delta S = \frac{|S_H - S_B|}{S_H + S_B} \cdot 100 \% . \tag{4}$$

Площа елементарної ділянки насипу або виїмки, розташованої між суміжними точками профілю з робочими позначками «0» та « $\pm r$ » (наприклад, точки 1-2 на рис. 1), залежить від величини робочої позначки (r) та відстані (d) між точками і визначається за відомою формулою площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} d \cdot r, \tag{5}$$



де r та d – основа та висота трикутника.

Аналогічно визначаються елементарні площі на ділянках між точками з різними за знаками робочими позначками (наприклад, ділянка між точками 2-3 на рис. 1). В цих випадках попередньо потрібно визначити відстані від точки «нульових» робіт до точок профілю:

$$\begin{cases} d_{i,0} = \frac{|r_i|}{|r_i| + |r_k|} \cdot d_{i,k}; \\ d_{k,0} = \frac{|r_k|}{|r_i| + |r_k|} \cdot d_{i,k}, \end{cases} \quad (6)$$

де r_i , $d_{i,0}$ та r_k , $d_{k,0}$ – основи та висоти відповідних трикутників. Знак робочих позначок визначає наявність на цій ділянці насипу або виїмки.

Випадок, коли на суміжних точках i та k профілю робочі позначки одного знаку (наприклад, між точками 3-4 на рис. 1), приводить до двох трикутників з різними основами (r_i , r_k) та однією висотою ($d_{i,k}$).

Оскільки кожна проміжна робоча позначка має враховуватись для обчислення площ попереднього та наступного трикутника, висоти для проміжних точок визначаються як різниця пікетажного положення наступної (X_{i+1}) та попередньої (X_{i-1}) точок:

$$d_i = X_{i+1} - X_{i-1}. \quad (7)$$

Для **аналітичного проектування параметричним способом МНК** прийемо за невідомі параметри проектні позначки початкових ($Z_{j,0}$) і кінцевих ($Z_{j,k}$) точок ділянок профілю з однаковим проектним ухилом та встановимо, що їх наближені значення Z' дорівнюють фактичним позначкам H (рис. 2):

$$\begin{cases} Z'_{j,0} = H_{j,0}; \\ Z'_{j,k} = H_{j,k}. \end{cases} \quad (8)$$

Для обчислення наближених значень проектних ухилів (u'_j) та проектних позначок ($Z'_{j,i}$) проміжних точок профілю скористаємося формулами (2, 3).

Робочі позначки r_i ($i=1,2,3,\dots,n$) пов'язані з параметрами $Z_{j,0}$ та $Z_{j,k}$ ($j=1,2,3,\dots,m$) параметричними рівняннями зв'язку, які у загальному випадку мають вигляд:

$$r_i = f_i(Z_{1,0}; Z_{1,k}=Z_{2,0}; Z_{2,k}=Z_{3,0}; \dots; Z_{m-1,k}=Z_{m,0}; Z_{m,k}), \quad (9)$$

або в прийнятих позначеннях (рис. 2) для i проміжної точки на j ділянці:

$$r_{j,i} = (Z_{j,0} + u_j x_{j,i}) - H_{j,i} = Z_{j,0} \left(1 - \frac{x_{j,i}}{D_j} \right) + Z_{j,k} \frac{x_{j,i}}{D_j} - H_{j,i}. \quad (10)$$

де j – номер ділянки; D_j – довжина j ділянки; i ($i=1,2,\dots,k$) – номер поточної проміжної точки на j ділянці; $x_{j,i} = X_{j,i} - X_{j,0}$ – віддалення i поточної точки від початку j ділянки.

Перейдемо від рівняння зв'язку (10) для i проміжної точки на j ділянці до параметричного рівняння поправок (робочих позначок $r_{j,i}$):

$$a_{j,0} \Delta_{j,0} + a_{j,k} \Delta_{j,k} + l_{j,i} = r_{j,i}, \quad (11)$$

де $\Delta_{j,0}$, $\Delta_{j,k}$ – поправки до наближених значень проектних позначок $Z'_{j,0}$, $Z'_{j,k}$.



Коефіцієнти параметричних рівнянь поправок для (i) проміжної точки, що розташована між початковою ($j,0$) та кінцевою (j,k) точками (j) ділянки, згідно (10) визначаються за формулами:

$$a_{j,0} = 1 - \frac{x_{j,i}}{D_j} \quad \text{та} \quad a_{j,k} = \frac{x_{j,i}}{D_j}. \quad (12)$$

Вільний член параметричного рівняння поправок визначається для кожної точки за наближеним значенням проектних ($Z'_{j,i}$) та фактичних ($H_{j,i}$) позначок точок профілю:

$$l_{j,i} = Z'_{j,i} - H_{j,i}. \quad (13)$$

Напишемо в матричному вигляді систему параметричних рівнянь поправок, приймаючи за поправки робочі позначки в рельєфних точках профілю (тобто, робочі позначки r_i – це поправки до фактичних позначок точок H_i для одержання їх проектних значень Z_i):

$$A \cdot \Delta + L = R, \quad (14)$$

де A – матриця коефіцієнтів (12) параметричних рівнянь поправок;

L – вектор вільних членів (13) параметричних рівнянь поправок;

R – вектор робочих позначок (11) точок профілю;

Δ – вектор поправок до наближених значень проектних позначок.

Для визначення невідомих поправок Δ_j ($j=1,2,3,\dots,m$) складається система нормальних рівнянь:

$$(A^T P A) \cdot \Delta + (A^T P L) = 0, \quad (15)$$

де P – діагональна матриця вагових коефіцієнтів.

Робочі позначки точок профілю визначаються за формулою (11). Остаточний контроль врівноваження полягає в порівнянні робочих позначок, одержаних за формулами (11) та (1). Для цього за врівноваженими значеннями обраних параметрів

$$Z_j = Z'_j + \Delta_j \quad (16)$$

обчислюємо проектні ухили (2), проектні позначки усіх проміжних точок профілю (3) та робочі позначки (1).

Контроль обчислення $[pr^2]$ при параметричному способі врівноваження можна виконати за формулами [5, с. 39]:

$$[pr^2] = [p_i a_{i,1} l_i] \cdot \Delta_1 + [p_i a_{i,2} l_i] \cdot \Delta_2 + \dots + [p_i a_{i,n} l_i] \cdot \Delta_m + [p_i l_i l_i]. \quad (17)$$

Для мінімізації робочих позначок МНК встановлюємо рівні значення вагових коефіцієнтів (наприклад, $p_i=1$), тобто обчислюємо робочі позначки (r_i) при умові $\sum r^2 = \min$.

В нашому прикладі запроектуємо три ділянки з однаковими проектними ухилами – ділянки між точками 1-5, 5-9 та 9-12. Прийmemo, що під час проектування позначки початку та кінця траси не змінюються, тобто $Z_1=H_1$ та $Z_{12}=H_{12}$. Тоді невідомими параметрами залишаються проектні позначки Z_5 та Z_9 . Таким чином, наближені значення проектних позначок (Z') для точок 1, 5, 9 та 12 дорівнюють їх фактичним позначкам (H).



За результатами врівноваження МНК маємо $Z_5=9,038$ м та $Z_9=5,622$ м, $[r^2]=1,992$, а видимі на профілі площі насипу $S_H=82,10$ м² та виїмки $S_B=52,97$ м², що обчислені за відповідними робочими позначками r_i , показує, що баланс земляних робіт складає $\Delta S=21,6$ %.

Таким чином, оптимізація робочих позначок за умови $[r^2]=\min$ не забезпечує баланс земляних мас.

Спосіб мінімізації балансових робочих позначок реалізується МНК при умові $\sum pr^2=\min$ врахуванням вагових коефіцієнтів (p_i), які встановлюються за відстанями від поточної точки (i) до попередньої ($i-1$) та до наступної ($i+1$) точок:

$$p_i = d_{i-1,i} + d_{i,i+1}. \quad (18)$$

Відомо, що на результати врівноваження МНК впливає співвідношення ваг, а не їх величина. При цьому бажано, щоб вага окремих результатів була близькою до одиниці. На повздовжньому профілі лінійних споруд відстані між пікетними точками складають $d=100$ м, тому пропонується вагу встановлювати за формулами:

$$\begin{cases} p_1 = d_{1,2}/200; \\ p_i = (d_{i-1,i} + d_{i,i+1})/200 & (i = 2,3,4, \dots, n-1); \\ p_n = d_{n-1,n}/200, \end{cases} \quad (19)$$

де $d_{i,i+1} = X_{i+1} - X_i$ – відстань між точками профілю з номерами (i) та ($i+1$).

Контролем обчислення ваг за формулами (19) є їх сума:

$$\sum p_i = D/100, \quad (20)$$

де $D = X_n - X_1$ – загальна довжина траси.

За результатами врівноваження МНК маємо $Z_5=8,936$ м та $Z_9=5,643$ м, $[pr^2]=0,957$. Проектний профіль, побудований на основі мінімізації балансових робочих позначок за умови $[pr^2]=\min$, наведений на рис. 1. Як і очікувалося, показник балансу видимих на профілі площ земляних робіт значно покращився та складає 9,6 %.

Аналітичне проектування МКП полягає в знаходженні змінних параметрів при екстремальному (максимальному або мінімальному) значенні цільової функції другого порядку та системи лінійних обмежень [6, с. 91].

Слід відзначити, що використання метода квадратичного програмування для мінімізації робочих ($F=\sum r^2=\min$) або балансових робочих позначок ($F=\sum pr^2=\min$) без додаткових обмежень приводить до результатів, одержаних методом найменших квадратів.

З точки зору проектування лінійних споруд найбільш актуальними є забезпечення мінімуму робочих позначок, балансу земляних робіт та обмеження проектних ухилів граничними значеннями.

Ця задача може бути вирішена, наприклад, з використанням сервісу «Пошук рішення» електронних таблиць «Microsoft Excel» [1, с. 110]. Для цього за формулою (11) складається таблиця параметричних рівнянь поправок (робочих позначок r), яка включає вагу (p), коефіцієнти (a) та вільні члени (l) рівнянь. Ці розрахунки, як і в методі найменших квадратів, виконуються для



наближених значень обраних невідомих параметрів – проектних позначок початкових та кінцевих точок ділянок з однаковими ухилами. Далі резервуються клітинки для поправок (ΔZ) до невідомих параметрів (Z) та колонки для обчислення робочих позначок (r_i) і добутків ($p_i r_i$) та ($p_i r_i^2$), в яких записуються формули відповідних величин:

$$- \text{робочих позначок } r_i = a_{i,1} \cdot \Delta_1 + a_{i,2} \cdot \Delta_2 + \dots + a_{i,m} \cdot \Delta_m + l_i;$$

$$- \text{добутків ваги на робочу позначку } p_i r_i \text{ та їх суму } \sum p_i r_i;$$

$$- \text{добутків ваги на квадрат робочих позначок } p_i r_i^2 \text{ та їх суму } \sum p_i r_i^2.$$

Для виконання оптимізації заповнюється форма «Параметри пошуку рішення»:

– вказується клітинка таблиці, в якій обчислюється значення цільової функції – $\sum p_i r_i^2$;

– позначається умова оптимізації – «Мінімум»;

– вказуються клітинки, які зарезервовані для поправок ΔZ ;

– вказується клітинка таблиці, в якій обчислюється $\sum p_i r_i$, та умова «=0»;

– знімається позначка, що змінні можуть бути тільки додатними.

Оптимізація цільової функції $F=[pr^2]=\min$ методом квадратичного програмування за умови $[pr]=0$ показує, що спостерігається баланс площ насапу та виїмки – $S_n = S_b = 68,91 \text{ м}^2$.

З метою забезпечення допустимих значень проектних ухилів

$$|u_j| \leq u_{\text{гр.}} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (21)$$

складаються додаткові лінійні нерівності

$$\left| \frac{Z_{j,k} - Z_{j,0}}{D_j} \right| - u_{\text{гр.}} \leq 0, \quad (22)$$

де $u_{\text{гр.}}$ – граничне значення проектного ухилу.

Після перетворення (22) одержимо параметричну форму нерівності у вигляді:

$$\Delta_{j,0} - \Delta_{j,k} + D_j \cdot (|u_j| - u_{\text{гр.}}) \leq 0, \quad (23)$$

де $\Delta_{j,0}$ та $\Delta_{j,k}$ – поправки до наближених значень проектних позначок початкової та кінцевої точок (j) ділянки з проектним ухилом u_j ; D_j – довжина (j) ділянки.

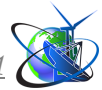
Параметричні нерівності для ухилів додаються до обмежень в параметрах пошуку рішення.

Висновки.

Автоматизація процесу проектування повздожнього профілю лінійних споруд дає можливість пошуку оптимальних рішень аналітичними методами найменших квадратів та квадратичного програмування за різними критеріями.

Незалежно від обраних критеріїв оптимізації процедура аналітичного проектування починається з аналізу фактичного профілю, побудови тренду рельєфу та складання параметричних рівнянь для робочих позначок, що спрощує алгоритм оптимізації і розробку комп'ютерної програми.

В роботі запропоновані уніфіковані для МНК та МКП способи визначення коефіцієнтів параметричних рівнянь, встановлення вагових коефіцієнтів та



оцінки балансу земляних робіт, а також параметрична форма нерівності для граничного значення проектного ухилу.

Результати роботи можуть використовуватися для підвищення якості та оптимізації проектних рішень повздожнього профілю лінійних споруд.

Література:

1. Баран П.І. Інженерна геодезія : Монографія / П.І. Баран – Київ: ПАТ «ВПОЛ», 2012. 618 с.
2. Баран П.І., Марущак М.П. Оптимальні методи визначення положення проектних ліній на профілі лінійних споруд / П.І. Баран, М.П. Марущак // Вісник геодезії та картографії, 2010, № 5 (68). С. 14-18.
3. Болотин А.И. Выравнивание профиля с обеспечением нулевого баланса и минимума площадей выемок и насыпей / А.И. Болотин // Геодезия и фотограмметрия при мелиоративном строительстве: межвуз. науч.-темат. сб. Новочеркасск: НИМИ, 1981. С. 40-45.
4. Коробочкин М.И. Алгоритмы и программы оптимального проектирования вертикальной планировки на ЭВМ / М.И. Коробочкин // М.: МИИЗ, 1973. 107 с.
5. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: Навчальний посібник. / С.П. Войтенко – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
6. Гончаренко Я.В. Математичне програмування. / Я.В. Гончаренко – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 184 с.

Abstract: *The article considers the analytical methods used to optimize the linear structure design profile taking into which utilizes the main criteria of optimality (minimization of working marks, balance and minimum earthwork, and the limit value of the design slope). There has been considered the analytical design applying the methods of least squares and quadratic programming. The authors developed and offered the methodology that can be used to balance the design marks of profile inflection points, taking into consideration the weighting factors of the working marks influence the balance of earthworks. The quadratic programming method has been proven to be efficient and offered to be used when it is necessary to take into account additional optimization conditions regarding the sum of working marks and the marginal slope. The examples of how the longitudinal profile of a road section is analytically designed are introduced.*

Key words: *linear structure, longitudinal profile, working mark, optimality criteria, least squares method, quadratic programming method.*