

УДК 514.18

**DISCRETE MODELING OF TECTONIC COATINGS OF ARCHITECTURAL BUILDINGS IN THE APPEARANCE OF A TRIANGULATION GRID****ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕКТОНІЧНИХ ПОКРИТТІВ АРХІТЕКТУРНИХ СПОРУД У ВИГЛЯДІ ТРИАНГУЛЯЦІЙНОЇ СІТКИ****Mostovenko Oleksiy / Мостовенко Олексій В.***Assistant / асистент*

ORCID: 0000-0003-1844-1843

**Kovalov Serhiy / Ковальов С.М.***Doctor of Technical Sciences, Prof. / д.т.н., проф.*

ORCID: 0000-0002-7713-1768

**Mostovenko Aleksandr / Мостовенко Олександр В.***Doctor of Technical Sciences, Prof. / д.т.н., проф.*

ORCID: 0000-0002-3423-4126

*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Київ, Повітрофлотський, 31, 03037*

**Анотація.** У даній роботі розглядається формування дискретної моделі безмоментного тектонічного покриття сталої товщини зі сталим перерізом опорних арок на триангуляційній сітці. Зовнішнє навантаження на вузли дискретної моделі безмоментного покриття складається з власної ваги елементів поверхні та елементів в опорних арках. Власна вага покриття в межах однієї клітини залежить від площі клітини, товщини покриття та об'ємної ваги матеріалу. Власна вага елемента опорної арки в межах однієї клітини залежить від довжини цього елемента і площі його поперечного перерізу, а також від об'ємної ваги матеріалу. Тоді навантаження на вузли сітки не буде однаковим, так як площі клітин і довжини ребер вздовж опорних арок будуть різними. Тому розрахунки координат вузлів сіток у попередніх дослідженнях є наближеними, оскільки зовнішнє навантаження на вузли не пов'язувалось із зазначеними параметрами.

Запропоновано тестовий приклад формування врівноваженої триангуляційної сітки під дією вертикальних сил, що відповідають поверхні в плані. Вертикальні сили в наступних наближеннях вибираються пропорційними площам відповідних комірок сітки та довжинам її ребер.

**Ключові слова:** дискретна сітка, безмоментне покриття, опорні арки, тектоніка, зовнішнє навантаження, власна вага, триангуляційна сітка.

**Вступ.**

Тектонічною вважається архітектурна споруда, композиція якої базується на виявленні у зовнішній формі внутрішніх властивостей споруди [1]. Одним із чинників тектонічних споруд є об'єднання вимог міцності, стійкості та функціональності конструкції. Таким вимогам відповідають безмоментні покриття архітектурних споруд. Безмоментність покриття, включаючи безмоментність таких елементів як арки опорного контура, можна забезпечити у дискретному вигляді за допомогою статико-геометричного методу [2, 3].

Безмоментною є конструкція, поверхня і опорні елементи якої формуються під дією власної ваги. Власна вага конструкції складається з власної ваги елементів її дискретної моделі. Оскільки параметри поверхні покриття наперед невідомі, вертикальні зусилля власної ваги можна визначити лише методом послідовних наближень [4]. За вихідне наближення



пропонується обрати поверхню, яка формується під дією вертикальних зусиль, що відповідають поверхні у плані. Вертикальні зусилля у наступних наближеннях обираються пропорційними площам відповідних клітин сітки та довжинам її ребер.

### Основний текст.

На похибки, що виникають у результаті визначення координат вузлів дискретного каркаса поверхні безмоментного покриття постійної товщини, істотно впливає правильність розподілу власної ваги покриття між вузлами сітки. Власна вага елемента покриття, яка враховується як зовнішнє зусилля, діюче на вузол сітки для покриття постійної товщини, повинна бути пропорційною площі елемента:

$$P = S \cdot \delta \cdot v, \quad (1)$$

де  $S$  – площа елемента покриття, що відноситься до проміжного вузла сітки;

$\delta$  - товщина покриття;

$v$  – об'ємна вага матеріалу покриття.

Якщо величини  $\delta$  і  $v$  є сталими для даного покриття, їх можна замінити сталим коефіцієнтом.

Тоді формула (1) спрощується:

$$P = k' \cdot S, \quad (2)$$

де  $k' = \delta \cdot v$ .

Припустимо, що власна вага кожної клітини рівномірно розподіляється між вузлами цієї клітини. Тоді власна вага покриття, що діє на проміжний вузол сітки з трикутними клітинами буде:

$$P = \frac{P'_{i,j} + P''_{i,j} + P'_{i-1,j} + P''_{i-1,j} + P'_{i,j-1} + P''_{i,j-1}}{3} \quad (3)$$

Власна вага ребер опорних арок з поперечним перерізом сталої площі для сітки з трикутними клітинами зі сталим параметром  $i$  або  $j$  буде:

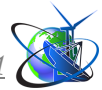
$$Q_{i,0} = \frac{k''_{i,0} (l_{i-1,0}^{i,0} + l_{i+1,0}^{i,0})}{2} \quad (4)$$

$$Q_{i,n} = \frac{k''_{i,n} (l_{i-1,n}^{i,n} + l_{i+1,n}^{i,n})}{2} \quad (5)$$

$$Q_{i,j} = \frac{k''_{i,j} (l_{0,j-1}^{0,j} + l_{0,j+1}^{0,j})}{2} \quad (6)$$

$$Q_{m,j} = \frac{k''_{m,j} (l_{m,j-1}^{m,j} + l_{m,j+1}^{m,j})}{2} \quad (7)$$

$$Q_{i,r} = \frac{k''_{i,r} (l_{i-1,r}^{i,r} + l_{i+1,r}^{i,r})}{2} \quad (8)$$



$$Q_{q,j} = \frac{k''_{q,j} (l_{q,j-1}^{q,j} + l_{q,j+1}^{q,j})}{2} \tag{9}$$

де  $k''$  - добуток об'ємної ваги матеріалу на площу поперечного перерізу арки;

$l$  – довжина елемента арки в межах однієї клітини.

Для сітки з трикутними клітинами власна вага ребер, що розміщені в діагональному напрямі на топологічній схемі, визначається за формулою:

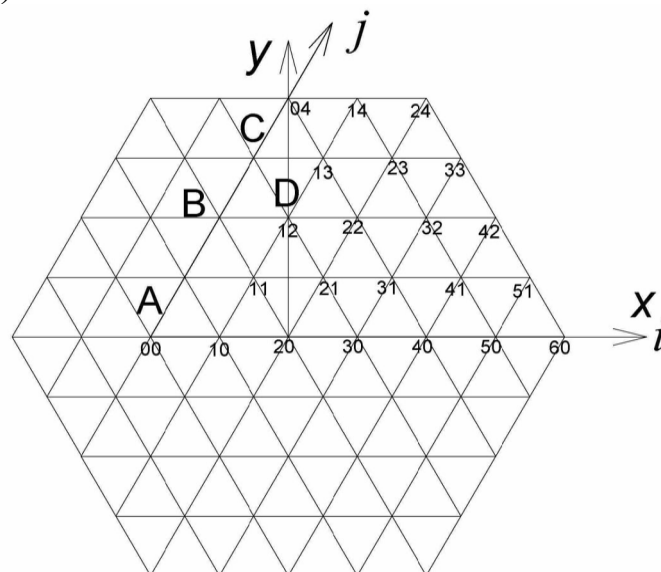
$$Q_{i,j} = \frac{k''_{i,a-i} (l_{i-1,j+1}^{i,j} + l_{i+1,j-1}^{i,j})}{2}, \tag{10}$$

де  $a$  – параметр діагонального напрямку.

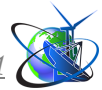
Навантаження на вузол опорного контура для сітки з трикутними клітинами складається частково з власної ваги клітин, що належать цьому вузлу, і частково з власної ваги двох ребер, які також належать цьому вузлу:

$$\begin{aligned} Q_{0,j-1}''' &= \frac{P'_{0,j-1} + P'_{0,j} + P''_{1,j}}{3} + \frac{Q_{0,j-1}^{0,j} + Q_{0,j}^{0,j+1}}{2}; \\ Q_{m,j}''' &= \frac{P'_{m,j} + P'_{m,j+1} + P''_{m-1,j}}{3} + \frac{Q_{m,j-1}^{m,j} + Q_{m,j}^{m,j+1}}{2}; \\ Q_{i,0}''' &= \frac{P''_{i-1,0} + P'_{i,1} + P''_{i,0}}{3} + \frac{Q_{i-1,0}^{i,0} + Q_{i,0}^{i+1,0}}{2} \\ Q_{i,n}''' &= \frac{P'_{i,n} + P''_{i,n-1} + P'_{i+1,n}}{3} + \frac{Q_{i-1,n}^{i,n} + Q_{i,n}^{i+1,n}}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

Приклад. Задано топологічну схему поверхні у вигляді правильного шестикутника зі стороною 4 умовні одиниці, поділеного на 96 однакових трикутників (рис. 1).



**Рис. 1.** Топологічна схема поверхні



Задано координати вузлів спірання арок:

$$x_{60}=4; y_{60}=0; z_{60}=0;$$

$$x_{-2,0}=-4; y_{-2,0}=0; z_{-2,0}=0;$$

$$x_{2,4}=2; y_{2,4}=3,464; z_{2,4}=0;$$

$$x_{-2,4}=-2; y_{-2,4}=3,464; z_{-2,4}=0;$$

$$x_{2,-4}=-2; y_{2,-4}=-3,464; z_{2,-4}=0;$$

$$x_{6,-4}=2; y_{6,-4}=-3,464; z_{6,-4}=0.$$

Для того, щоб у системах рівнянь рівноваги вузлів не було від'ємних індексів, за початок відліку оберемо точку  $A$  ( $x_A=-2; y_A=0$ ).

Задамо також умовну вагу оболонки у межах однієї клітини  $P=-0.3$  та умовну вагу елемента опорного контура у межах клітини  $Q=-10.5$ . Тоді згідно з (3) навантаження на внутрішні вузли сітки дорівнює:

$$P^{III} = 2P = -0.6, \quad (12)$$

а навантаження на вузол опорного контура згідно з (11):

$$Q^{III} = Q + P = -10.8 \quad (13)$$

Нехай дискретною моделлю поверхні покриття буде розтягнута сітка зі стиснутим опорним контуром. Причому зусилля стиску у ребрах опорного контура задамо у вісім разів більше, ніж зусилля розтягнення у внутрішніх ребрах сітки. Тоді рівняння рівноваги вузлів сітки будуть у вигляді трьох систем:

1) проєкції зусиль у ребрах сітки на вісь  $Ox$ :

$$2X_{21} - 6X_{30} + 2X_{31} + X_{40}=0;$$

$$X_{30} + 2X_{31} - 6X_{40} + 2X_{41} + X_{50} = 0;$$

$$X_{40} + 2X_{41} - 6X_{50} + 2X_{51} + 4 = 0;$$

$$-7X_{21} + X_{22} + X_{30} + X_{31} = 0;$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{30} - 6X_{31} + X_{32} + X_{40} + X_{41} = 0;$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{40} - 6X_{41} + X_{42} + X_{50} + X_{51} = 0;$$

$$X_{13} + X_{21} - 6X_{22} + X_{23} + X_{31} + X_{32} = 0;$$

$$X_{22} + X_{23} + X_{31} - 6X_{32} + X_{33} + X_{41} + X_{42}=0;$$

$$-7X_{13} + X_{14} + X_{22} + X_{23} = 0;$$

$$X_{13} + X_{14} + X_{22} - 6X_{23} + X_{32} + X_{33} + 2 = 0;$$

$$X_{41} - 8X_{42} + X_{50} + 14X_{51} - 32 = 0;$$

$$X_{32} - 8X_{33} + X_{41} + 14X_{42} - 8X_{51} = 0;$$

$$X_{23} + X_{32} + 14X_{33} - 8X_{42} - 16=0;$$

$$X_{13} + X_{23} + 14X_{14} - 16 = 0;$$

(14)



2) проєкції зусиль у ребрах сітки на вісь  $Oy$ :

$$\begin{aligned}
 Y_{12} - 5Y_{21} + Y_{22} + Y_{31} &= 0; \\
 Y_{21} + Y_{22} - 6Y_{31} + Y_{32} + Y_{41} &= 0; \\
 Y_{31} + Y_{32} - 6Y_{41} + Y_{42} + Y_{51} &= 0; \\
 Y_{21} + Y_{22} - 3Y_{12} + Y_{13} &= 0; \\
 Y_{12} + Y_{13} + Y_{21} - 6Y_{22} + Y_{23} + Y_{31} + Y_{32} &= 0; \\
 Y_{22} + Y_{23} + Y_{31} - 6Y_{32} + Y_{33} + Y_{41} + Y_{42} &= 0; \\
 Y_{04} + Y_{12} - 5Y_{13} + Y_{14} + Y_{22} + Y_{23} &= 0; \\
 Y_{13} + Y_{14} + Y_{22} - 6Y_{23} + Y_{32} + Y_{33} + 3,464 &= 0; \\
 Y_{41} - 8Y_{42} + 14Y_{51} &= 0; \\
 Y_{32} - 8Y_{33} + Y_{41} + 14Y_{42} - 8Y_{51} &= 0; \\
 Y_{23} + Y_{32} + 14Y_{33} - 8Y_{42} - 27,712 &= 0; \\
 -8Y_{04} + Y_{13} + 14Y_{14} + Y_{23} - 27,712 &= 0; \\
 7Y_{04} + Y_{13} - 8Y_{14} &= 0;
 \end{aligned} \tag{15}$$

3) проєкції зусиль у ребрах сітки на вісь  $Oz$ :

$$\begin{aligned}
 6Z_{30} - 6Z_{20} - 0,6 &= 0; \\
 Z_{20} - 4Z_{30} + 2Z_{31} + Z_{40} - 0,6 &= 0; \\
 Z_{30} + 2Z_{31} - 6Z_{40} + 2Z_{41} + Z_{50} - 0,6 &= 0; \\
 Z_{40} + 2Z_{41} - 6Z_{50} + 2Z_{51} - 0,6 &= 0; \\
 2Z_{30} - 6Z_{31} + 2Z_{40} + 2Z_{41} - 0,6 &= 0; \\
 Z_{31} + Z_{40} - 5Z_{41} + Z_{42} + Z_{50} + Z_{51} - 0,6 &= 0; \\
 Z_{41} - 8Z_{42} + Z_{50} + 14Z_{51} - 10,8 &= 0; \\
 2Z_{41} + 14Z_{42} - 16Z_{51} - 10,8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Враховуючи симетрію вихідних умов, системи рівнянь рівноваги проєкцій зусиль на осі  $Ox$  і  $Oy$  складено для  $1/4$  частини топологічної схеми, а систему рівнянь рівноваги проєкцій зусиль на вісь  $Oz$  – для  $1/12$  частини.

Результати розв'язання систем (14-16) наведено в таблиці 1.

Результати підрахунку абсцис і ординат залишаються сталими в ітераційному процесі, оскільки зміна вертикального навантаження на них не впливає.



**Таблиця 1. Координати дискретної сітки вихідного наближення**

J=4	X	0	0,99	2				
	Y	3,989	3,852	3,464				
	Z	3,194	2,353	0				
J=3	X		0,53	1,617	2,842			
	Y		2,893	2,801	2,783			
	Z		1,865	1,546	2,353			
J=2	X		0	1,1	2,241	3,455		
	Y		1,919	1,906	1,905	1,995		
	Z		1,394	1,44	1,865	3,194		
J=1	X			0,552	1,662	2,771	3,831	
	Y			0,957	0,959	0,988	1,069	
	Z			1,176	1,394	1,865	2,353	
J=0	X			0	1,105	2,2	3,234	4
	Y			0	0	0	0	0
	Z			1,076	1,176	1,44	1,546	0
		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6

Результатом розв’язання системи рівнянь (16) є лише наближені аплікати вузлів сітки. Для отримання більш точного результату потрібно власну вагу елементів покриття узгодити з площинами клітин і довжинами ребер.

Довжина довільного ребра BC (рис. 1) визначається за координатами вузлів, які належать цьому ребру:

$$l_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2}. \quad (17)$$

За відомими довжинами ребер можна підрахувати за формулою Герона площі трикутних клітин сітки:

$$S_{i,j} = \sqrt{p_{i,j}(p_{i,j} - l_{BC})(p_{i,j} - l_{CD})(p_{i,j} - l_{BD})}. \quad (18)$$

Складемо систему рівнянь рівноваги вузлів з урахуванням площ клітин та довжин контурних ребер сітки. Враховуючи симетрію сітки, ці рівняння складено тільки для 1/12 її частини.

$$\begin{aligned}
 -6Z_{20} + 6Z_{30} + k_1 S_{20} &= 0; \\
 Z_{20} - 4Z_{30} + 2Z_{31} + Z_{40} + k_1 S_{30} &= 0; \\
 Z_{30} + 2Z_{31} - 6Z_{40} + 2Z_{41} + Z_{50} + k_1 S_{40} &= 0; \\
 Z_{40} + 2Z_{41} - 6Z_{50} + 2Z_{51} + k_1 S_{50} &= 0; \\
 2Z_{30} - 6Z_{31} + 2Z_{40} + 2Z_{41} + k_1 S_{31} &= 0; \\
 Z_{31} + Z_{40} - 5Z_{41} + Z_{42} + Z_{50} + Z_{51} + k_1 S_{41} &= 0; \\
 Z_{41} - 8Z_{42} + Z_{50} + 14Z_{51} + k_1 S_{51} + k_2 l_{51} &= 0; \\
 2Z_{41} + 14Z_{42} - 16Z_{51} + k_1 S_{42} + k_2 l_{42} &= 0,
 \end{aligned} \quad (19)$$



де  $Z_{20} = 1,076$ ;  $Z_{42} = 3,194$ ;

$k_1 S_{i,j}$  – навантаження на вузол з урахуванням площ клітин;

$$k_1 S_{i,j} = \frac{k_1 (S''_{i,j} + S'_{i,j} + S'_{i-1,j} + S''_{i,j+1} + S'_{i,j-1} + S''_{i+1,j})}{3}; \tag{20}$$

$k_2 l_{i,j}$  – навантаження на вузли опорних арок з урахуванням ваги елементів арок;

$$k_2 l_{i,j} = \frac{k_2 (l_{i,j}^{i-1,j+1} + l_{i,j}^{i+1,j-1})}{2} \tag{21}$$

Навантаження на вузли сітки, які підраховано за формулами (20) і (21), наведені у таблиці 2, підставляються до системи рівнянь (19), після розв’язання якої отримаємо нове наближення аплікату сітки, яке наведено в таблиці 3.

Цей результат також є наближеним, оскільки зміна аплікату вузлів сітки впливає на навантаження на вузли. Тому результати розв’язання системи (19) приймаються як вихідні дані для наступної ітерації.

**Таблиця 2. Навантаження на вузли сітки**

		№ наближення			
$J=2$	1			$0,813k_1+1,306k_2$	
	2			$0,795k_1+1,224k_2$	
	3			$0,98k_1+1,209k_2$	
	4			$0,795k_1+1,206k_2$	
	5			$0,804k_1+1,206k_2$	
$J=1$	1		$1,13k_1$	$1,347k_1$	$0,872k_1+1,948k_2$
	2		$1,142k_1$	$1,197k_1$	$0,909k_1+1,969k_2$
	3		$1,13k_1$	$1,128k_1$	$0,895k_1+1,973k_2$
	4		$1,136k_1$	$1,356k_1$	$0,895k_1+1,974k_2$
	5		$1,133k_1$	$1,36k_1$	$0,898k_1+1,974k_2$
$J=0$	1	$1,064k_1$	$1,079k_1$	$1,122k_1$	$1,601k_1$
	2	$1,064k_1$	$1,079k_1$	$1,175k_1$	$1,734k_1$
	3	$1,064k_1$	$1,079k_1$	$1,123k_1$	$1,66k_1$
	4	$1,064k_1$	$1,081k_1$	$1,13k_1$	$1,663k_1$
	5	$1,066k_1$	$1,081k_1$	$1,123k_1$	$1,601k_1$
		$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$



Алгоритм ітераційного процесу виглядає наступним чином:

- 1) за вихідне наближення приймається сітка, яка формується під дією рівномірно розподіленого навантаження на вузли;
- 2) за формулою (17) визначаються довжини всіх ребер сітки вихідного наближення;
- 3) за формулою (18) визначаються площі клітин сітки;
- 4) за формулами (20) і (21) визначається навантаження на вузли сітки і опорних арок та підставляється до системи рівнянь (19), при розв'язанні якої отримаємо наступне наближення аплікату сітки;
- 5) отримані аплікати вузлів порівнюються з аплікатами попереднього наближення і визначається відносна похибка обчислень за формулою:

$$\delta = \frac{(z_{ij}^n - z_{ij}^{n-1})}{z_{ij}^n} 100\%, \tag{22}$$

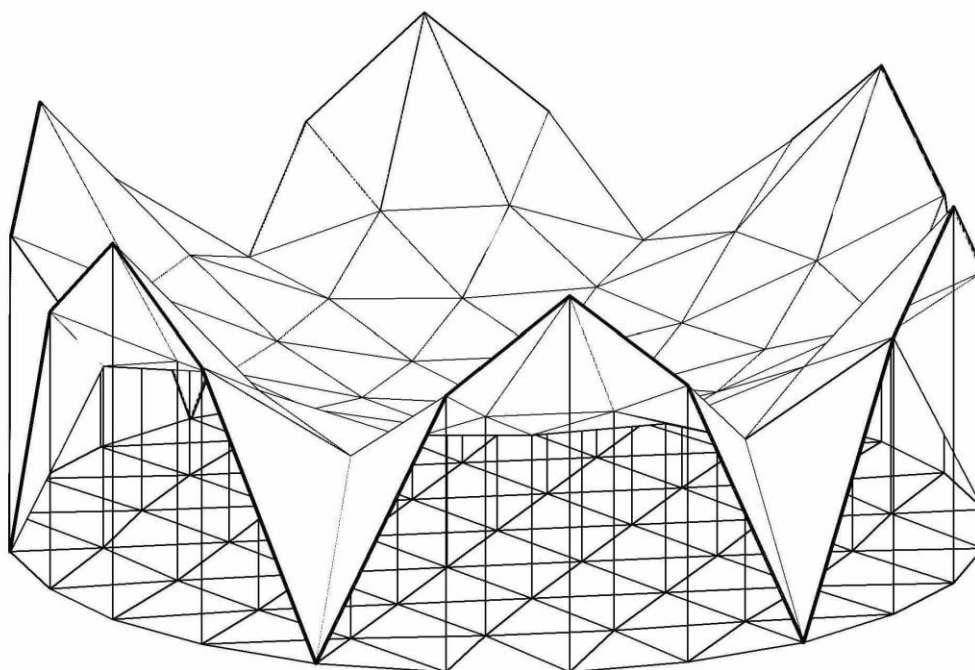
де  $n$  – номер ітерації.

**Таблиця 3. Аплікати вузлів сітки за ітераціями**

		№ набли ження			
$J=2$	1		1,862	3,194	
	2		1,883		
	3		1,894		
	4		1,868		
	5		1,869		
$J=1$	1		1,386	1,862	2,488
	2		1,392	1,883	2,514
	3		1,399	1,894	2,519
	4		1,388	1,868	2,519
	5		1,389	1,869	2,518
$J=0$	1	1,076	1,173	1,433	1,543
	2		1,174	1,436	1,545
	3		1,177	1,447	1,555
	4		1,173	1,436	1,549
	5		1,174	1,438	1,555
		$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$

Якщо похибка  $\delta$  не перевищує задану допустиму похибку, ітераційний процес зупиняється. Якщо  $\delta$  перевищує допустиму задану похибку, ітераційний процес повторюється, починаючи з пункту 2. В наведеному вище прикладі найбільша відносна похибка складає 0,6%, для чого знадобилося виконати чотири ітерації.





**Рис. 2. Врівноважена поверхня архітектурного покриття**

За результатами четвертої ітерації з табл. 3 на рис. 2 побудовано дискретну врівноважену поверхню.

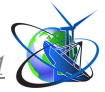
#### **Висновки.**

Рівномірний розподіл власної ваги покриття між внутрішніми вузлами правильної у плані сітки дає незначну похибку лише для пологих покриттів, оскільки площі клітин на поверхні не значно відрізняються від площ клітин у плані. Із збільшенням вступу поверхні покриття різниця між зазначеними площами збільшується, що веде до збільшення похибки розрахунків.

Наведені алгоритми врахування власної ваги елементів покриття дають більш точний результат обчислень, але не враховують похибку дискретизації, яку можна зменшити лише при зменшенні кроку дискретизації.

#### **Література:**

1. Словник іншомовних слів / за ред. О. С. Мельничука. — К. : Головна редакція Української Радянської Енциклопедії АН УРСР, 1974.
2. Ботвіновська С.І. Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об'єктів архітектури та дизайну /С.І. Ботвіновська/ Автореферат ... доктора технічних наук 05.01.01 К.: КНУБА, 2018. - 43 с.
3. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / С.Н. Ковалев // Дисс. ... докт. техн. наук: 05.01.01. - М.: МАИ, 1986. – 320 С.
4. Shoup T.E. A Practical Guide To Computer Methods For Engineers/ Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1979. – 235 p.



**Abstract.** *In this study, the formation of a discrete model of a momentless tectonic covering of constant thickness with a constant section of supporting arches on a triangulation grid is considered. The external load on the nodes of the discrete model of the moment-free covering consists of the self-weight of the surface elements and elements in the supporting arches. The specific weight of the coating within one cell depends on the area of the cell, the thickness of the coating and the volume weight of the material. The own weight of an element of a supporting arch within one cell depends on the length of this element and its cross-sectional area, as well as on the volumetric weight of the material. Then the load on the grid nodes will not be the same, since the cell areas and the lengths of the edges along the supporting arches will be different. Therefore, the calculations of the coordinates of grid nodes in previous studies are approximate, since the external load on the nodes was not related to the specified parameters.*

*In this study, an example of grid formation under the action of vertical forces corresponding to the surface in the plan is considered. The vertical forces in the following approximations are chosen proportional to the areas of the corresponding grid cells and the lengths of its edges.*

**Key words:** *discrete mesh, momentless covering, supporting arches, tectonics, external load, own weight, triangulation mesh*

Статья отправлена: 20.04.24 г.