



УДК 621.9.048

MATHEMATICAL MODELING OF THE VIBRATORY ABRASIVE PROCESSING USING DEM IN SYSTEMS WITH AN ACTIVE WORKING ELEMENT**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІБРОАБРАЗИВНОЇ ОБРОБКИ З ВИКОРИСТАННЯМ DEM У СИСТЕМАХ З АКТИВНИМ РОБОЧИМ ОРГАНОМ****Buhrov D.Y/Бугров Д.Ю**

Graduate student/аспірант

ORCID: 0009-0000-4571-5147

National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic»

24 Pershotravnevyi Ave., Poltava, Ukraine, 36011

***Анотація.** У статті проаналізовано запропоновану математичну модель віброабразивного процесу в установці з ротаційною робочою камерою (активний робочий орган), яка реалізована в рамках методу дискретних елементів (DEM) із урахуванням мікрOMEХАНИКИ взаємодії частинок і деталей. Вона враховує основні діючі сили в системі деталь-абразив: контактні, відцентрову, вібраційну, гравітаційну та коріолісову. Модель ґрунтується на теоріях Герца-Міндіна та постійно орієнтовано обертового моменту і комплексно враховує характер взаємодії частинок з врахуванням зміни динамічних умов. Числовим моделюванням DEM здійснено відтворення взаємодії великої кількості частинок на мікрорівні, що забезпечило фізично обґрунтоване відтворення процесу. Побудовані порівняльні графіки демонструють вплив амплітуди вібрацій та швидкості обертання робочої камери на траєкторії руху частинок та їх контактні сили, зміну розподілу контактного тиску. Результати дослідження можуть бути використані для попередньої оцінки ефективності аналогічного віброобладнання на етапі проектування до проведення експериментів.*

***Ключові слова:** віброабразивна обробка, контактна сила, активний робочий орган, DEM, математичне моделювання, ротаційна камера.*

Вступ. Віброабразивна обробка широко застосовується для очищення, видалення задирків та полірування поверхонь виробів різної складності, в тому числі декоративних елементів. Сучасні дослідження сфокусовані на розвитку математичних моделей, що враховують властивості абразивних середовищ і кінематичні параметри обробки. Більшість існуючих моделей процесу спрощують взаємодію між частинками абразиву та оброблюваними деталями. Особливо це стосується систем із активним робочим органом, де наприклад є одночасний вплив обертання робочої камери та вібраційних сил, і як наслідок виникають складні динамічні ефекти, включаючи неоднорідний рух частинок і локальні концентрації сил.

Дане дослідження спрямоване на формування бази для чисельного моделювання методом дискретних елементів (DEM). Перевагою методу DEM є відсутність необхідності розглядати процеси на макрорівні. Замість цього, моделювання здійснюється шляхом відтворення взаємодії великої кількості частинок на мікрорівні що забезпечує максимально фізично обґрунтоване відтворення процесу. Отримані дані можуть бути використані для аналізу динаміки процесу, розподіл контактних сил, визначення оптимальних значень параметрів роботи установки та прогнозувати її ефективність до проведення експериментів.



Основний текст.

Вихідні припущення моделі: частинки абразиву і деталі розглядаються як кулі зі скінченим радіусом R_p і жорсткою поверхнею. Обертовий барабан рухається з кутовою швидкістю ω , а платформа вібрує з амплітудою A і частотою f . Контактні взаємодії моделюється на основі теорій Герца-Міндліна [6, 7] та постійно орієнтованого обертового моменту [10], яка описує сили пружності та тертя під час зіткнення.

У робочій обертовій камері віброустановки діють сили - вібрації:

$$F_{vib,i} = m_i a_z(t) = -A\omega_v^2 \sin(\omega_v t) \cdot e_z \quad (1)$$

прискорення:

$$a_z(t) = -A\omega_v^2 \sin(\omega_v t) \quad (2)$$

відцентрова:

$$F_{centr,i} = m_i \omega_c^2 r_i \quad (3)$$

коріолісова :

$$F_{cor,i} = -2m_i (\omega_c \cdot v_{rel,i}) \quad (4)$$

Поступальний та обертальний рух кожної окремої частинки описується шляхом розв'язання рівняння на основі другого закону Ньютона з врахуванням усіх діючих сил:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_j (F_{ij}^n + F_{ij}^t) + m_i g - A\omega_v^2 \sin(\omega_v t) \cdot e_z + m_i \omega_c^2 r_i - 2m_i (\omega_c \cdot v_{rel,i}) \quad (5)$$

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = \sum_j (R_{ij} \cdot F_{ij}^t - \tau_{ij}^r) \quad (6)$$

де m_i , I_i , v_i , ω_i відповідно є масою, моментом інерції, вектором поступальної швидкості та вектором кутової швидкості частинки i ; \mathbf{g} — це вектор гравітації, F_{ij}^n , F_{ij}^t та τ_{ij} відповідно є нормальною силою, тангенціальною силою та опором коченню, що діють на частинку i у результаті взаємодії з частинкою j . R_{ij} — це вектор між центром частинки i та точкою контакту з частинкою j .

Нормальна F_n і тангенціальна F_t сили в точці контакту частинок абразиву та деталей визначаються за допомогою безковзної лінійної пружинно-демпферної контактної моделі Герца-Міндліна [6], розрахункова схема якої зображена на рис.1. При цьому сили F_n та F_t мають еластичну і в'язку складові, які позначені відповідними верхніми індексами e (еластична) і v (в'язка), і визначаються наступними рівняннями:

$$F_n = F_n^e + F_n^v \quad (7)$$

$$F_t = F_t^e + F_t^v \quad (8)$$

Тангенціальна сила визначається законом тертя Кулона: $|F_t| \leq \mu |F_n|$ де μ — коефіцієнт тертя. Після перевищення цього граничного значення виникає ковзання між частинками. Еластична сила в нормальному напрямку F_n^e



базується на класичній теорії Герца про контакт між двома сферами [7]. Ця теорія передбачає малі еластичні деформації, невеликі контактні поверхні та еліпсоїдальний розподіл контактних напружень. Еластична сила в тангенціальному напрямку F_t^e ґрунтується на теорії Міндліна [6]. Вона визначається як нормальним, так і тангенціальним перекриттям, відповідно δ_n і δ_t . Тангенціальне перекриття δ_t виникає внаслідок різних значень тангенціальних швидкостей двох частинок у точці контакту. Ці теорії описують нелінійні залежності між нормальними еластичними силами та переміщеннями, які виражаються рівняннями:

$$F_n^e = -k_n \cdot \delta_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^* \cdot |\delta_n| \cdot \delta_n} + m_i (g + a_{vib} + a_{centr}) \quad (9)$$

$$F_t^e = -k_t \cdot \delta_t = 8 \cdot G^* \sqrt{R^* \cdot |\delta_n| \cdot \delta_t} \quad (10)$$

де k_n і k_t — коефіцієнти нормальної і тангенціальної жорсткості контакту;

$R^* = \frac{R_i \cdot R_j}{R_i + R_j}$ - еквівалентний радіус двох тіл, що контактують.

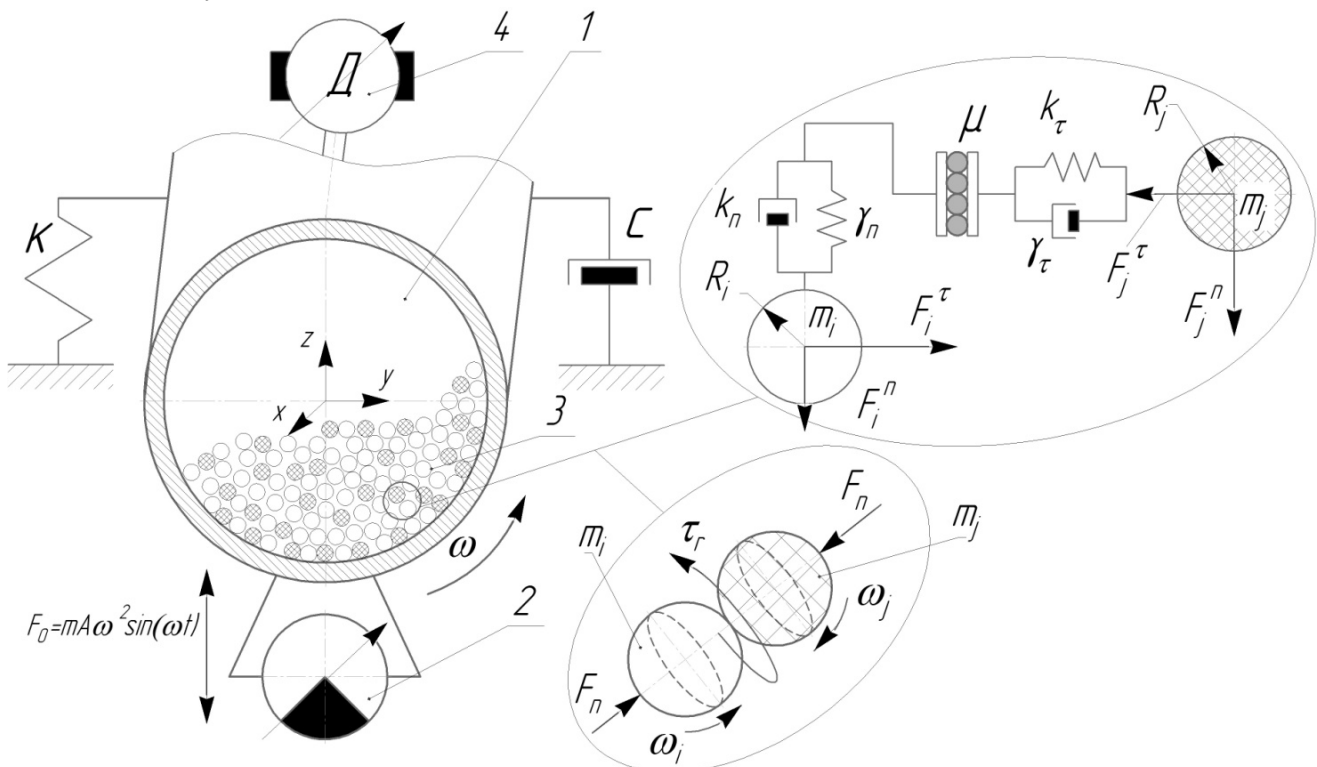


Рисунок 1 – Розрахункова схема віброустановки:

1- обертова робоча камера; 2 –віброзбуджувач; 3 – частинки абразиву і оброблювані деталі; 4 – привод обертання робочої камери

Авторська розробка

Еквівалентний модуль зсуву:

$$G^* = \frac{1}{\frac{2(2-\nu_i) \cdot (2-\nu_i)}{E_i} + \frac{2(2-\nu_j) \cdot (2-\nu_j)}{E_j}} \quad (11)$$



Еквівалентний модуль Юнга:

$$E^* = \frac{1}{\frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j}} \quad (12)$$

де ν_i, ν_j — коефіцієнти Пуассона.

В'язкі складові у рівняннях (7) та (8) дозволяють системі розсіювати енергію для досягнення стійкого стану ущільнення за розумний проміжок часу. У своєму початковому формулюванні [8] запропоновано вираз для критичного коефіцієнта демпфування β , базуючись на критичному часі демпфування системи з одним ступенем вільності, що складається з пружини, маси та демпфера. У роботі [9] було запропоновано, що критичний коефіцієнт демпфування β визначається через коефіцієнт відновлення e — фізичний параметр частинок, що характеризує втрати енергії під час зіткнень і пластичних деформацій:

$$\beta = \frac{-\ln(e)}{\sqrt{\ln(e)^2 + \pi^2}} \quad (13)$$

$$F_n^v = \gamma_n \cdot v^n = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \beta \sqrt{S_n \cdot m^* \cdot v^n} \quad (14)$$

$$F_t^v = \gamma_t \cdot v^t = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \beta \sqrt{S_t \cdot m^* \cdot v^t} \quad (15)$$

де γ_n та γ_t — це нормальні та тангенціальні константи демпфування в'язкопружного контакту, v_n та v_t — нормальні та тангенціальні компоненти відносної швидкості у точці контакту, $m^* = \frac{m_i \cdot m_j}{m_i + m_j}$ — приведена маса; S_n та S_t — це відповідно нормальна та тангенціальна жорсткості, які визначаються за формулами:

$$S_n = 2E^* \sqrt{R^* \cdot |\delta_n|} \quad (16)$$

$$S_t = 8G^* \sqrt{R^* \cdot |\delta_n|}. \quad (17)$$

Опір коченню являє собою моменти сил, що передаються через зону контакту частинок. Зона контакту, яка формується коли дві частинки стискаються під нормальним навантаженням, може передавати момент завдяки силам тертя, розподіленим по площі контакту [10]. У теорії постійно орієнтовано обертового моменту значення величини опору τ_r пропорційне

нормальній силі F_n і спрямоване у напрямку відносного кочення $\frac{\omega_{ij}}{|\omega_{ij}|}$:

$$\tau_t = -\mu \cdot R^* |F_n| \frac{\omega_{ij}}{|\omega_{ij}|} \quad (18)$$



де μ_r — коефіцієнт тертя при коченні, а ω_{ij} — відносна кутова швидкість частинки i відносно частинки j .

Чисельне моделювання методом DEM виконувалось у програмному середовищі Simulink програмного комплексу MATLAB. Для реалізації рівнянь використовувались функціональні блоки Simulink такі як: Constant, Gain, Integrator, Math Function, Sum, Derivative. Задані значення процесу: $f=50$ Гц, $A=2\dots 10$ (мм), $\omega=0\dots 10$ (рад/с), $\mu=0,3$, $R_a=3$ мм, $R_d=6$ мм.

Моделювання базується на поділі часу на малий часовий крок Δt і повторенні ітераційного циклу для обчислення стану системи в кожен момент часу, зазвичай в межах від 10^{-6} с до 10^{-5} с:

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{m}{k_H}} \quad (19)$$

де m – маса частинки, k_H – параметр жорсткості контакту.

На рис. 2 зображені тривимірні траєкторії руху частинок. Розрахунки виконано для фіксованої амплітуди і частоти вібрації, що дозволяє наочно продемонструвати характер руху частинки для різних значень обертів робочої камери установки.

На рис. 3 показано розподіл контактної тиску у робочій камері віброустановки при різних швидкостях обертання і однакої амплітуді вібрацій. При меншій швидкості тиск рівномірно розподіляється від центру камери й поступово знижується до її країв. Максимальний тиск спостерігається у центрі. При більшій швидкості тиск збільшується у напрямку до стінок камери через вище значення відцентрової сили, формуючи радіально-симетричний градієнт.

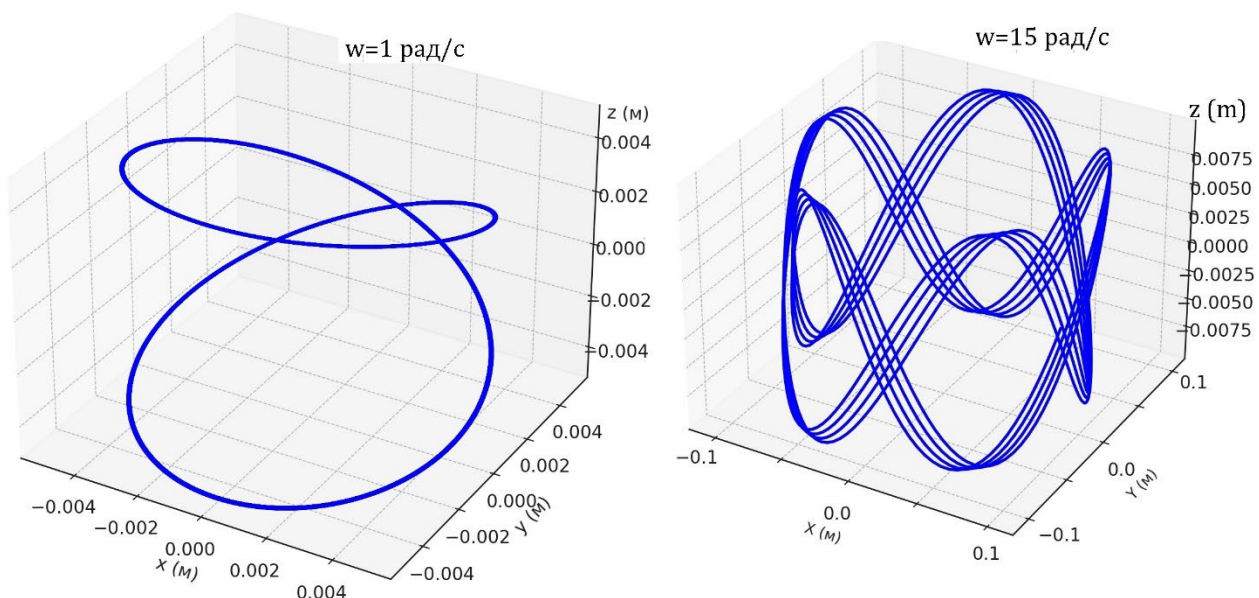


Рисунок 2 – Траєкторія руху частинок в обертовій камері

Авторська розробка

Максимальний тиск тепер спостерігається біля периферії камери, що дозволяє обробляти деталі більш рівномірно, підвищуючи якість поверхні та продуктивність.

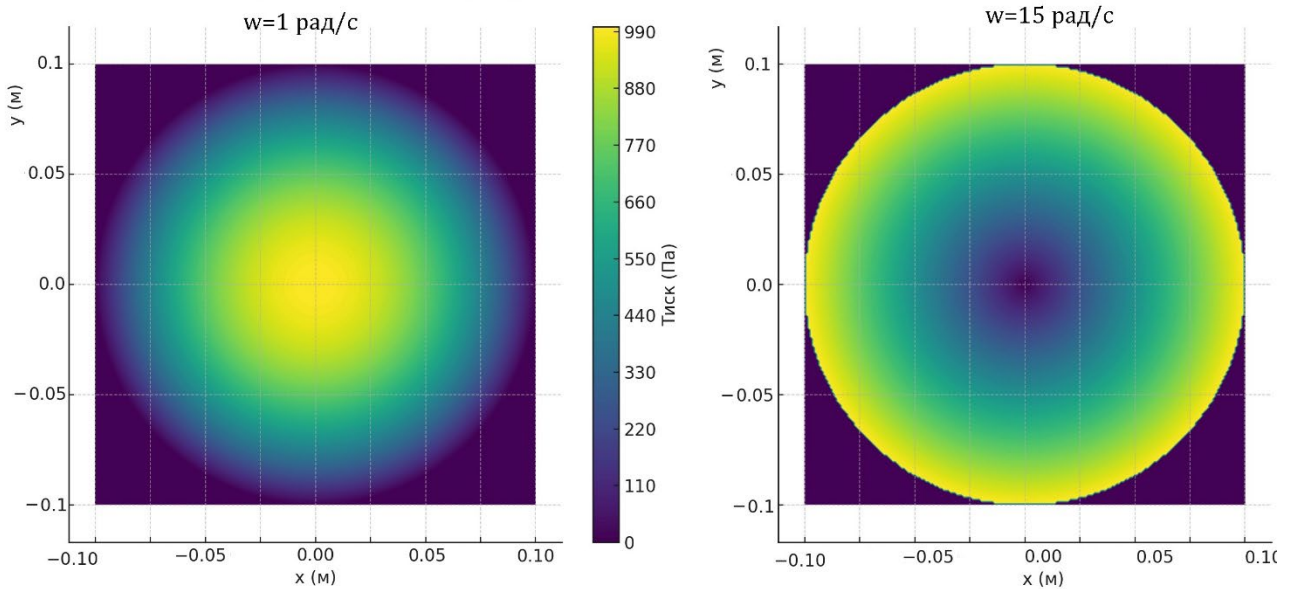


Рисунок 3 – Карта розподілу контактної тиску в обертовій камері

Авторська розробка

Як видно на рис.4, контактна сила збільшується з підвищенням амплітуди вібрацій. Це може бути пов'язано зі зростанням енергії ударів частинок об деталі при збільшенні амплітуди. Тому збільшення амплітуди покращує інтенсивність обробки завдяки підвищенню силової взаємодії, проте надмірне збільшення може призвести до дефектів деталей та зростання енергоспоживання.

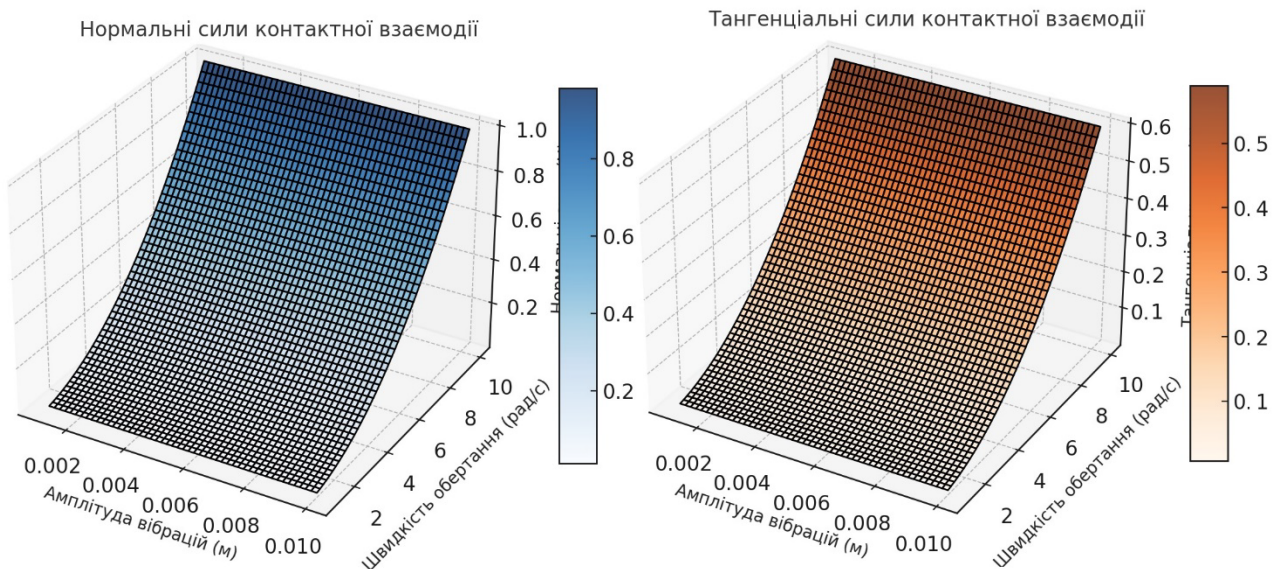


Рисунок 4 – Графіки нормальних та тангенціальних контактних сил

Авторська розробка

Висновки.

Встановлено, що наведена модель описує складну динаміку контактної взаємодії частинок абразивного середовища з деталями у обертовій робочій камері віброустановки. Враховується зміна динамічних параметрів під впливом вібраційного та обертального збудження.



Отримані результати чисельного моделювання DEM показали, що зі збільшенням швидкості обертання барабана частинки концентруються поблизу стінок, формуючи циркуляційні рухи. Поєднання вібрації та обертання активного робочого органу створюють умови для інтенсифікації контактних взаємодій. Збільшення амплітуди вібрації призводить до інтенсивнішого перемішування частинок, однак якщо інерційна сила перевищує силу тяжіння або контактну силу має місце ефект "зависання" і втрату контакту із поверхнею. Це знижує ефективність обробки, оскільки необхідна абразивна дія стає нерівномірною.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на експериментальну верифікацію математичної моделі та її калібрування для адаптації до особливостей певного технологічного процесу віброобробки.

Література:

1. O'Sullivan, C. (2011) 'Particle-based discrete element modeling: Geomechanics perspective', *International Journal of Geomechanics*, 11(6), pp. 449–464. doi: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000024.
2. Wensrich, C. and Katterfeld, A. (2012) 'Rolling friction as a technique for modelling particle shape in DEM', *Powder Technology*, 217, pp. 409–417. doi: 10.1016/j.powtec.2011.10.057.
3. Liu, W., Wang, S., Jiang, Q. et al. (2022) 'Study on the motion characteristics of abrasive media in vibratory finishing', *Journal of Physics: Conference Series*, 2198, 012035. doi: 10.1088/1742-6596/2198/1/012035.
4. Wan, S., Liu, Y.C. and Woon, K. (2016) 'A simple general process model for vibratory finishing', *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 86, pp. 2393–2400. doi: 10.1007/s00170-016-8354-0.
5. Hashimoto, F., Johnson, S.P. and Chaudhari, R. (2016) 'Modeling of material removal mechanism in vibratory finishing process', *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 65, pp. 325–328. doi: 10.1016/j.cirp.2016.04.081.
6. Mindlin, R.D. (1949) 'Compliance of elastic bodies in contact', *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 16, pp. 259–268.
7. Johnson, K.L. (1987) *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
8. Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. (1979) 'A discrete numerical model for granular assemblies', *Géotechnique*, 29(1), pp. 47–65.
9. Tsuji, Y., Tanaka, T. and Ishida, T. (1992) 'Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe', *Powder Technology*, 71(3), pp. 239–250. doi: 10.1016/0032-5910(92)88030-L.
10. Zhou, Y., Wright, B., Yang, R., Xu, B.H. and Yu, A.B. (1999) 'Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation', *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 269(2–4), pp. 536–553.

Abstract. This paper analyzes a proposed mathematical model of the vibratory abrasive process in a system featuring a rotational working chamber (active working element). The model is implemented using the DEM while accounting for the micromechanics of particle-to-workpiece interactions. It considers the primary forces acting within the detail-abrasive system: contact



forces, centrifugal force, vibrational force, gravitational force, and Coriolis force. The model is based on Hertz-Mindlin theories and a constantly oriented torque framework, comprehensively incorporating the nature of particle interactions under dynamically changing conditions. Comparative graphs illustrate the influence of vibration amplitude and chamber rotation speed on particle trajectories, contact forces, and the distribution of contact pressure.

Keywords: vibratory abrasive processing, contact force, active working element, DEM, mathematical modeling, rotational chamber.

Науковий керівник: д.т.н., проф. Коробко Б.О.

Статтю надіслано: 30.12.2024 г.

© Бугров Д.Ю.