http://www.moderntechno.de/index.php/meit/article/view/meit37-01-007
DOI: 10.30890/2567-5273.2025-37-01-007

УДК 539.3

AXISYMMETRIC THERMOELASTIC PROBLEM FOR A CONE TRUNCATED TWICE BY SPHERICAL SURFACES

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КОНУСА, ДВІЧІ УСІЧЕНОГО ПО СФЕРИЧНИХ ПОВЕРХНЯХ

Protserov Yu.S. / Процеров Ю.С.
c.f.m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.
ORCID: 0009-0009-2659-2802
Kolesnikov K.V. / Колесніков К.В.
postgraduate student / аспірант
ORCID: 0009-0000-2284-6339
Odesa I.I. Mechnikov National University,
Odesa, Vsevoloda Zmiienka 2, 65082
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
Одеса, вул. Всеволода Змієнка 2, 65082

Анотація. *Розглянуто осесиметричну задачу термопружності про напружений стан двічі усіченого конуса при виконанні умов ковзкого контакту на конічній поверхні та нерухомо закріплених сферичних поверхнях. На одній зі сферичних поверхонь задано температуру, а інші поверхні конуса теплоізольовані. Використання нових інтегральних перетворень за меридіальним кутом безпосередньо до рівняння теплопровідності та до неоднорідних рівнянь Ламе дає змогу звести задачу до одновимірних крайових задач. Розв'язок останніх отримано в явному вигляді. Проведено дослідження напружень на поверхні конуса і виявлено зони стискаючих та розтягуючих напружень.*

Ключові слова. *Двічі усічений конус, термопружність, інтегральні перетворення, точний розв’язок, дослідження полів напружень.*

Вступ.

Задачі термопружності відіграють важливу роль під час розроблення нових конструкцій у машинобудуванні та будівництві. Це пов'язано з тим, що питання напруженого стану, спричинені нерівномірним нагріванням, мають велике значення для аналізу міцності та правильного функціонування конструкцій нової техніки, що працюють в умовах високих температур. Теплові напруження можуть спричиняти появу тріщин в елементах конструкцій, зменшення жорсткості, виникнення та розвиток пластичних деформацій, що ведуть до повного або прогресуючого руйнування.

Більша частина робіт з термопружності присвячена дослідженню напруженого стану пластин, оболонок, циліндрів під дією теплових полів. Що стосується тіл конічної форми, то тут кількість робіт дуже обмежена [1 - 5]. Це можна пояснити як складністю відповідного математичного формулювання таких задач, так і відсутністю необхідного інтегрального перетворення для їх розв'язання. Г.Я. Поповим було запропоновано нові інтегральні перетворення з ядрами у вигляді функцій Лежандра, які успішно працюють у сферичній системі координат [6, 7]. Це дало змогу розв'язати йому низку задач термопружності для конусів [8, 9].

У даній роботі отримано точний розв'язок осесиметричної задачі термопружності для суцільного конуса, двічі зрізаного по сферичних поверхнях. Припускається, що обидві сферичні поверхні нерухомо закріплені, а циліндрична поверхня перебуває в умовах ковзкого контакту. На одній зі сферичних поверхонь задано розподіл температури, а інша частина поверхні конуса теплоізольована. Математичне формулювання задачі складається з крайової задачі для знаходження розподілу температури всередині конуса та крайової задачі для неоднорідної системи рівнянь Ламє для визначення переміщень точок конуса в залежності від знайденої температури. Досліджено поля напружень, що виникають на границях конуса, і виявлено зони стискаючих та розтягуючих напружень.

1. Постановка задачі. В сферичній системі координат (r,θ,φ) розглядається двічі усічений конус, який займає область $a<r<b, 0\le\theta<\omega, -\pi<\varphi\le\pi$. Будемо вважати, що сферичні поверхні $r=a$ та $r=b$ нерухомо закріплені, а конічна поверхня $\theta=\omega$ знаходиться в умовах ковзкого контакту. Сферична поверхня $r=b$ та конічна поверхня $\theta=\omega$ теплоізольовані, а сферична поверхня $r=a$ підтримується при заданій температурі $f(\theta)$. Таким чином розглядаємо задача є осесиметричною, тобто усі величини – температура, переміщення та напруження не залежать від змінної φ. Потрібно визначити розподіл температури та напружень у тілі, що розглядається.

Температура $T(r,\theta)$ у конусі мусить задовольняти рівнянню розповсюдженню тепла [10, 11]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0,\quad a<r<b,0\le\theta<\omega \tag{1}$$

при крайових умовах

$$T\big|_{r=a}=f(\theta),\ \frac{\partial T}{\partial\theta}\bigg|_{r=b}=0,\quad 0\le\theta<\omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\omega}=0,\quad a<r<b \tag{3}$$

Якщо температура $T(r,\theta)$ буде знайдена, то для знаходження переміщень $u(r,\theta)=u_r(r,\theta)$ та $v(r,\theta)=u_\theta(r,\theta)$ потрібно розв'язати систему рівнянь Ламє

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-2u+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{2r}{\kappa+1}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}\right)-$$

$$-\frac{2\kappa}{\kappa+1}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot v)=\frac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_T r^2\frac{\partial T}{\partial r},\ a<r<b,0\le\theta<\omega \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}v+2\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]+\frac{2r}{\kappa-1}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}=\frac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_T r\frac{\partial T}{\partial r}$$

де $\kappa=3-4\mu$, μ - коефіцієнт Пуассона, α_T - коефіцієнт лінійного теплового розширення. При крайових умовах

$$u\big|_{r=a}=v\big|_{r=a}=0,\quad u\big|_{r=b}=v\big|_{r=b}=0,\quad 0\le\theta<\omega \tag{5}$$

$$v\big|_{\theta=\omega}=\tau_{\theta r}\big|_{\theta=\omega}=0\text{, тобто } v\big|_{\theta=\omega}=\frac{\partial u}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\omega}=0,\quad a<r<b \tag{6}$$

2. Розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності. Для зведення крайової задачі (1) – (3) до одновимірної використаємо інтегральне перетворення з ядрами у вигляді функцій Лежандра, яке було запропоновано Г.Я. Поповим [12]

$$T_k(r)=\int_0^\omega T(r,\theta)P_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

з формулою обернення

$$T(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(r)\frac{P_{\nu_k}(\cos\theta)}{\left\|P_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2}$$

де $\nu_0 = 0$, ν_k $(k = 1,2,...)$ додатні корені рівняння $\left.\frac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\omega} = P_\nu^1(\cos\omega) = 0$, а

$\left\|P_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2 = \int\limits_0^\omega \left[P_{\nu_k}(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta d\theta$.

Застосовуючи це перетворення до рівняння (1) (при цьому крайова умова (3) буде виконана) та до крайових умов (2), отримуємо одновимірну крайову задачу відносно трансформанти температури

$$\left(r^2 T_k'(r)\right)' - \nu_k(\nu_k + 1)T_k(r) = 0, \quad a < r < b \tag{7}$$

$$T_k(a) = f_k, \quad T_k'(b) = 0 \tag{8}$$

де $f_k = \int\limits_0^\omega f(\theta) P_{\nu_k}(\cos\theta) d\theta$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння (7) має вигляд

$$T_k(r) = A_k r^{\nu_k} + B_k r^{-\nu_k - 1}$$

З крайових умов (8) знайдемо значення сталих A_k і B_k та отримуємо значення

$$T_k(r) = \frac{f_k}{\Delta_k}\left[\left((\nu_k + 1)\left(\frac{r}{b}\right)^{\nu_k} + \nu_k\left(\frac{b}{r}\right)^{\nu_k+1}\right)\right], \text{ де } \Delta_k = (\nu_k + 1)\left(\frac{a}{b}\right)^{\nu_k} + \nu_k\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu_k+1}$$

Використовуючи формулу обернення, знаходимо розподіл температури

$$T(r,\theta) = \frac{f_0}{1 - \cos\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\Delta_k}\left[(\nu_k + 1)\left(\frac{r}{b}\right)^{\nu_k} + \nu_k\left(\frac{b}{r}\right)^{\nu_k+1}\right] \frac{P_{\nu_k}(\cos\theta)}{\left\|P_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2} \tag{9}$$

3. **Розв'язок крайової задачі для системи рівнянь Ламє та знаходження переміщень**. Так як температура $T(r,\theta)$ вже знайдена, то для знаходження переміщень $u(r,\theta)$ і $v(r,\theta)$ треба розв'язати крайову задачу (4) – (6). Для зведення Ії до одновимірної знов використаємо інтегральні перетворення Лежандра. До першого рівняння системи рівнянь Ламє (4) застосуємо інтегральне перетворення

$$u_k(r) = \int\limits_0^\omega u(r,\theta) P_{\nu_k}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

а до другого рівняння цієї системи інтегральне перетворення

$$v_k(r)=\int_0^{\omega} v(r,\theta)P_{\nu_k}^1(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

з формулами обернення відповідно

$$u(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(r)\frac{P_{\nu_k}(\cos\theta)}{\left\|P_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2} \text{ та } v(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(r)\frac{P_{\nu_k}^1(\cos\theta)}{\left\|P_{\nu_k}^1(\cos\theta)\right\|^2}$$

де, як і в задачі теплопровідності, $\nu_0=0$, ν_k $(k=1,2,...)$ додатні корені рівняння

$$\left.\frac{\partial P_\nu(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\omega}=P_\nu^1(\cos\omega)=0.$$

Як результат отримуємо систему відносно трансформант (при цьому крайові умови (6) будуть виконані)

$$\left(r^2u_k'(r)\right)'-\left(2+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}N_k\right)u_k(r)-\frac{2r}{\kappa+1}v_k'(r)+\frac{2\kappa}{\kappa+1}v_k(r)=\frac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_T r^2T_k'(r)$$

$$\left(r^2v_k'(r)\right)'+\frac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k\left[2u_k(r)-v_k(r)\right]+\frac{2r}{\kappa-1}N_ku_k'(r)=\frac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_TN_krT_k(r) \quad (10)$$

де $N_k=\nu_k(\nu_k+1)$. Застосовуючи ці інтегральні перетворення до крайових умов (5), маємо

$$u_k(a)=v_k(a)=0 \text{ і } u_k(b)=v_k(b)=0 \quad (11)$$

Спочатку розглянемо цю крайову задачу для випадку коли $k=0$, тобто для $\nu_0=0$. Тоді $v_0(r)=0$, а для $u_0(r)$ маємо крайову задачу

$$\left(r^2u_0'(r)\right)'-2u_0(r)=\frac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_Tr^2T_0'(r), \quad u_0(a)=u_0(b)=0$$

Через те що $T_0(r)=f_0$ є сталою величиною, то $T_0'(r)=0$ і ми отримуємо однорідну крайову задачу, яке має тільки тривіальний розв'язок $u_0(r)=0$.

Для випадку коли $\nu_k\neq0\,(k=1,2,...)$ систему рівнянь (10) запишемо у векторному вигляді

$$L_2[U_k]=\left(r^2U_k'(r)\right)'+rAU_k'(r)+BU_k(r)=H_k(r) \quad (12)$$

де введені матриці $A=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2}{\kappa+1} \\ \dfrac{2}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} -2-\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}N_k & \dfrac{2\kappa}{\kappa+1} \\ 2\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k & -\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k \end{pmatrix}$

і вектори $U_k(r)=\begin{pmatrix} u_k(r) \\ v_k(r) \end{pmatrix}$ та $H_k(r)=\begin{pmatrix} h_k^{(1)}(r) \\ h_k^{(2)}(r) \end{pmatrix}$, де $h_k^{(1)}(r)=\dfrac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_T r^2 T_k'(r)$,

$h_k^{(2)}(r)=\dfrac{7-\kappa}{\kappa-1}\alpha_T N_k r T_k(r)$.

Загальний розв’язок однорідного векторного рівняння $L_2[U_k]=0$ будується за схемою роботи [13] на основі розв’язку однорідного матричного рівняння $L_2[Y_k(r)]=0$, де $Y_k(r)$ є матриця другого порядку. Розв’язок матричного рівняння розшукуємо у вигляді $Y_k(r)=r^s I$, де s комплексний параметр, I одинична матриця. Через те що $L_2[r^s I]=M(s)r^s$, де матриця

$$M(s)=Is(s+1)+As+B=\begin{pmatrix} s(s+1)-2-\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}N_k & 2\dfrac{\kappa-s}{\kappa+1} \\ \dfrac{2}{\kappa-1}N_k(s+\kappa+1) & s(s+1)-\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k \end{pmatrix}$$

розв’язком матричного рівняння буде матриця

$$Y_k(r)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma M^{-1}(s)r^s ds$$

де γ замкнутий контур, який охоплює полюси оберненої матриці

$$M^{-1}(s)=\frac{1}{\Delta(s)}\begin{pmatrix} s(s+1)-\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k & \dfrac{2}{\kappa+1}(s-\kappa) \\ -2\dfrac{s+\kappa+1}{\kappa-1}N_k & s(s+1)-2-\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}N_k \end{pmatrix}$$

Тут $\Delta(s)=s^4+2s^3+(2N_k+1)s^2-2(N_k+1)s+N_k(N_k-2)$, нулями якого будуть $s_1=\nu_k+1, s_2=\nu_k-1, s_3=-\nu_k, s_4=-\nu_k-2$.

Розглядаючи два замкнутих контури γ^+ і γ^-, які охоплюють полюси s_1,s_2 та s_3,s_4 відповідно, за теоремою про лишки отримуємо два лінійно незалежних розв’язків матричного рівняння

$$Y_k^+(r) = R(\nu_k+1) r^{\nu_k+1} A^+ + R(\nu_k) r^{\nu_k-1} B^+ \text{ та } Y_k^-(r) = R(\nu_k) r^{-\nu_k} A^- + R(\nu_k+1) r^{-\nu_k-2} B^-$$

де $R(\nu_k) = \dfrac{1}{(2\nu_k-1)(2\nu_k+1)}$, $R(\nu_k+1) = \dfrac{1}{(2\nu_k+1)(2\nu_k+3)}$

$$A^+ = \begin{pmatrix} -\dfrac{\nu_k+1}{\kappa-1}(\nu_k+\kappa+1) & \dfrac{\nu_k-\kappa+1}{\kappa+1} \\ -\dfrac{\nu_k+\kappa+2}{\kappa-1} N_k & \dfrac{1}{\kappa+1} N_k \end{pmatrix}; \; B^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{\nu_k(\nu_k+\kappa)}{\kappa-1} & -\dfrac{\nu_k-\kappa-1}{\kappa+1} \\ \dfrac{\nu_k+\kappa}{\kappa-1} N_k & -\dfrac{\nu_k(\nu_k-2\kappa-1)}{\kappa+1} \end{pmatrix}$$

$$A^- = \begin{pmatrix} -\dfrac{\nu_k(\nu_k+\kappa)}{\kappa-1} & -\dfrac{\nu_k+\kappa}{\kappa+1} \\ \dfrac{\nu_k-\kappa-1}{\kappa-1} N_k & \dfrac{\nu_k(\nu_k-2\kappa-1)}{\kappa+1} \end{pmatrix}; \; B^- = \begin{pmatrix} \dfrac{(\nu_k+1)(\nu_k-\kappa)}{\kappa-1} & \dfrac{\nu_k+\kappa+2}{\kappa+1} \\ -\dfrac{\nu_k-\kappa+1}{\kappa-1} N_k & -\dfrac{1}{\kappa+1} N_k \end{pmatrix}$$

Загальний розв’язок однорідного векторного рівняння (12) буде визначатися формулою

$$U_k(r) = \begin{pmatrix} u_k(r) \\ v_k(r) \end{pmatrix} = Y_k^+(r) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + Y_k^-(r) \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

де C_j, $j = \overline{1,4}$ довільні сталі.

Для знаходження часткового розв’язку неоднорідного векторного рівняння (12) побудуємо фундаментальну матрицю $\Phi_k(r,\rho)$, тобто таку матрицю щоб частковий розв’язок знаходився за формулою

$$U_k(r) = \int_a^b \Phi_k(r,\rho) H_k(\rho) \frac{d\rho}{\rho}$$

Для цього подовжимо нулем праву частину рівняння на проміжки $(0;a)$ і $(b;\infty)$ та застосуємо до нього інтегральне перетворення Мелліна за змінною r

$U_{kp} = \int_0^\infty U_k(r) r^{p-1} dp$ з формулою обернення $U_k(r) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} U_{kp} r^{-p} dp$.

У просторі трансформант отримуємо систему

$$\left[p(p-1) - 2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} N_k \right] u_{kp} + \frac{2}{\kappa+1}(p+\kappa) v_{kp} = h_{kp}^{(1)}$$

$$\frac{\kappa+1-p}{\kappa-1}N_k u_{kp}+\left[p\left(p-1\right)-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k\right]v_{kp}=h_{kp}^{(2)}$$

Легко побачити, що матриця цієї системи $\tilde{M}\left(p\right)=M\left(-p\right)$. Тоді можемо відразу записати що

$$\tilde{M}^{-1}\left(p\right)=M^{-1}\left(-p\right)=\frac{1}{\tilde{\Delta}\left(p\right)}\begin{pmatrix} p\left(p-1\right)-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}N_k & -2\frac{p+\kappa}{\kappa+1} \\ -2\frac{\kappa+1-p}{\kappa-1}N_k & p\left(p-1\right)-2-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}N_k \end{pmatrix}$$

де $\tilde{\Delta}\left(p\right)=\Delta\left(-p\right)=p^4-2p^3-\left(2N_k+1\right)p^2-2\left(N_k+1\right)p+N_k\left(N_k-2\right)$, який має нулі $p_1=-\nu_k-1,\ p_2=-\nu_k+1,\ p_3=\nu_k,\ p_4=\nu_k+2$. Звідки $U_{kp}=\tilde{M}^{-1}\left(p\right)\begin{pmatrix} h_{kp}^{(1)} \\ h_{kp}^{(2)} \end{pmatrix}$.

Використовуючи контурне інтегрування за формулою обернення перетворення Мелліна, знайдемо фундаментальну матрицю

$$\Phi_k\left(r,\rho\right)=\begin{cases} R\left(\nu_k\right)C^{+}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu_k}+R\left(\nu_k+1\right)D^{+}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu_k+2}, & \rho<r \\ R\left(\nu_k\right)C^{-}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu_k-1}+R\left(\nu_k+1\right)D^{-}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu_k+1}, & \rho>r \end{cases}$$

$$C^{+}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa-1}N_k & -\frac{\nu_k+\kappa}{\kappa+1} \\ \frac{\nu_k-\kappa-1}{\kappa-1}N_k & \frac{\nu_k\left(\nu_k-2\kappa-1\right)}{\kappa+1} \end{pmatrix};\quad D^{+}=\begin{pmatrix} \frac{\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)}{\kappa-1} & \frac{\nu_k+\kappa+2}{\kappa+1} \\ -\frac{\nu_k-\kappa+1}{\kappa-1}N_k & -\frac{1}{\kappa+1}N_k \end{pmatrix}$$

$$C^{-}=\begin{pmatrix} -\frac{\nu_k\left(\nu_k+\kappa\right)}{\kappa-1} & \frac{\nu_k-\kappa-1}{\kappa+1} \\ -\frac{\nu_k+\kappa}{\kappa-1}N_k & \frac{\nu_k\left(\nu_k-2\kappa-1\right)}{\kappa+1} \end{pmatrix};\quad D^{-}=\begin{pmatrix} \frac{\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)}{\kappa-1} & \frac{\nu_k-\kappa+1}{\kappa+1} \\ \frac{\nu_k+\kappa+2}{\kappa-1}N_k & -\frac{1}{\kappa+1}N_k \end{pmatrix}$$

Отже розв’язок векторного рівняння (12) має вигляд

$$U_k\left(r\right)=\begin{pmatrix} u_k\left(r\right) \\ v_k\left(r\right) \end{pmatrix}=\int_a^b\Phi_k\left(r,\rho\right)H_k\left(\rho\right)\frac{d\rho}{\rho}+Y_k^{+}\left(r\right)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+Y_k^{-}\left(r\right)\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Сталі C_j знаходимо з крайових умов (11), що призводить до системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{4} a_{mj} C_j = b_m, \quad m = 1,2,3,4 \tag{14}$$

Вирази для коефіцієнтів a_{mj} та правих частин b_m приведені у Доданку.

За формулами обернення інтегральних перетворень за змінною θ отримуємо вирази для переміщень

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r) \frac{P_{\nu_k}(\cos\theta)}{\left\| P_{\nu_k}(\cos\theta) \right\|^2}, \quad v(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) \frac{P_{\nu_k}^1(\cos\theta)}{\left\| P_{\nu_k}^1(\cos\theta) \right\|^2}$$

Отриманий розв'язок містить ряди і для їх дослідження на збіжність треба мати асимптотичну оцінку для величин, які вони містять. Для цього використаємо відомі асимптотичні формули для функцій Лежандра [14]

$$P_\nu(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}} \left\{ \cos\left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right)\theta - \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\nu} \right) \right\}$$

$$P_\nu^1(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi\sin\theta}} \left\{ \cos\left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right)\theta + \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{\nu} \right) \right\}$$

За їх допомогою знаходимо асимптотичну поведінку коренів

$$\nu_k \sim \frac{\pi}{\omega}\left(k + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \text{ коли } k \to \infty$$

а також квадратів норм функцій Лежандра

$$\left\| P_{\nu_k}(\cos\theta) \right\|^2 = \int_0^{\omega} \left[P_{\nu_k}(\cos\theta) \right]^2 \sin\theta d\theta = \frac{\omega}{\pi\nu_k} \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu_k} \right) \right]$$

$$\left\| P_{\nu_k}^1(\cos\theta) \right\|^2 = \int_0^{\omega} \left[P_{\nu_k}^1(\cos\theta) \right]^2 \sin\theta d\theta = \frac{\omega}{\pi}\nu_k \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu_k} \right) \right] \text{ коли } \nu_k \to \infty$$

4. Отримання виразів для напружень. В задачах термопружності найбільший інтерес становлять поля напружень, які виникають у тілі під дією температури.

Напруження у конусі пов'язані з переміщеннями наступними співвідношеннями

$$\sigma_r = 2G\left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot v\right) \right] \right\}$$

$$\sigma_{\theta}=2G\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial}+u\right)+\frac{3-\kappa}{\kappa+1}\left[\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}u\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot v\right)\right]\right\} \tag{15}$$

$$\tau_{r\theta}=G\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}-v\right)+\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

де G модуль зсуву матеріалу конуса.

Застосуємо до перших двох співвідношень (15) інтегральне перетворення за змінною θ з ядром $P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)$, а до останнього – з ядром $P_{\nu_k}^{1}\left(\cos\theta\right)$. Як результат отримуємо для них вирази у просторі трансформант

$$\sigma_{rk}\left(r\right)=\frac{2G}{\kappa+1}\left\{4u_k'\left(r\right)+\frac{1}{r}\left(3-\kappa\right)\left[2u_k\left(r\right)-v_k\left(r\right)\right]\right\}$$

$$\sigma_{\theta k}\left(r\right)=\frac{2G}{\kappa+1}\left\{\frac{1}{r}\left[\left(7-\kappa\right)u_k\left(r\right)-4v_k\left(r\right)\right]+\left(3-\kappa\right)u_k'\left(r\right)\right\}$$

$$\tau_{r\theta k}\left(r\right)=G\left\{\frac{1}{r}\left[N_k u_k\left(r\right)-v_k\left(r\right)\right]+v_k'\left(r\right)\right\}$$

Тепер, використовуючи формули (13) та формули обернення інтегральних перетворень за змінною θ, отримуємо вирази для напружень у конусі. Ці вирази будуть дуже громіздкими, тому обмежимося випадком знаходження напружень на сферичних поверхнях $r=a, r=b$ та конічній поверхні $\theta=\omega$ конуса. Так як

$$\sigma_{rk}\left(a\right)=\frac{8G}{\kappa+1}u_k'\left(a\right),\ \tau_{r\theta k}\left(a\right)=Gv_k'\left(a\right),\ \sigma_{rk}\left(b\right)=\frac{8G}{\kappa+1}u_k'\left(b\right),\ \tau_{r\theta k}\left(b\right)=Gv_k'\left(b\right)$$

то маємо такі формули

$$\sigma_r\left(a,\theta\right)=\frac{8G}{\kappa+1}\sum_{k=1}^{\infty}u_k'\left(a\right)\frac{P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)}{\left\|P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)\right\|^{2}},\ \tau_{r\theta}\left(a,\theta\right)=G\sum_{k=1}^{\infty}v_k'\left(a\right)\frac{P_{\nu_k}^{1}\left(\cos\theta\right)}{\left\|P_{\nu_k}^{1}\left(\cos\theta\right)\right\|^{2}}$$

$$\sigma_r\left(b,\theta\right)=\frac{8G}{\kappa+1}\sum_{k=1}^{\infty}u_k'\left(b\right)\frac{P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)}{\left\|P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)\right\|^{2}},\ \tau_{r\theta}\left(b,\theta\right)=G\sum_{k=1}^{\infty}v_k'\left(b\right)\frac{P_{\nu_k}^{1}\left(\cos\theta\right)}{\left\|P_{\nu_k}^{1}\left(\cos\theta\right)\right\|^{2}} \tag{16}$$

$$\sigma_{\theta}\left(r,\omega\right)=\frac{2G}{\kappa+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r}\left[\left(7-\kappa\right)u_k\left(r\right)-4v_k\left(r\right)\right]+\left(3-\kappa\right)u_k'\left(r\right)\right\}\frac{P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)}{\left\|P_{\nu_k}\left(\cos\theta\right)\right\|^{2}}$$

5. Результати чисельних досліджень. Для обчислень були взяти наступні геометричні параметра конуса: $a=1\,м, b=3\,м, \omega=\frac{\pi}{3}$, матеріал конусу сталь:

$\mu = 0.29, G = 7.93 \cdot 10^4\ МПа, \alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\ C^{-1}$. Задана на сферичній поверхні $r = a$ температура $f(\theta) = 100(\omega - \theta)^2$.

Для заданого кута ω були обчислені корені ν_k та квадрати норм функцій Лежандра, які наведені в наступній таблиці 1

Таблиця 1 – Корені та квадрати норм функцій Лежандра

k	ν_k	$\left\|P_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2$	$\left\|P^1_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2$
0	0	0.5	----
1	3.195691	0.088940	1.192525
2	6.219529	0.049386	2.217529
3	9.228849	0.034188	3.227418
4	12.233809	0.026144	4.232700
5	15.236886	0.021164	5.235982
6	18.238981	0.017777	6.238219
7	21.240499	0.015325	7.239841
8	24.241650	0.013468	8.241070
9	27.242552	0.012012	9.242035
10	30.243273	0.010840	10.242816

Як можна побачити з результатами обчислень, вони добре узгоджуються з отриманою раніше їх асимптотичними оцінками.

За формулами (16) були обчислені нормальні та дотичні напруження на сферичних поверхнях $r = a$ та $r = b$ в залежності від кута θ, які наведені у таблиці 2

Як можна бачити на сферичній поверхні $r = a$ при наближенні до конічної поверхні конуса виникають зони від'ємних, тобто розтягуючих нормальних напружень. Це обумовлено як видом заданої температури $f(\theta)$ на цій поверхні, так і крайовими умовами на ній та на конічній поверхні. На сферичній поверхні $r = b$ нормальні напруження протилежні по знаку нормальним напруженням коли $r = a$ та значно менші за абсолютною величиною, що також зумовлено тими самими причинами. Що стосується дотичних напружень, то вони є значно меншими за нормальні та мають різні знаки коли $r = a$ та $r = b$, що також зумовлено крайовими умовами на цих поверхнях та видом заданої температури.

Таблиця 2 – Напруження на сферичних поверхнях

θ	$\sigma_r(a,\theta)$	$\sigma_r(b,\theta)$	$\tau_{r\theta}(a,\theta)$	$\tau_{r\theta}(b,\theta)$
0	1169.7361	-25.8134	0	0
$\pi/30$	798.8965	-24.8142	44.5224	-0.5194
$2\pi/30$	470.6045	-21.9433	57.5469	-0.9713
$3\pi/30$	293.0577	-17.5553	62.5933	-1.3019
$4\pi/30$	154.3761	-12.1689	60.3848	-1.4794
$5\pi/30$	48.5025	-6.3822	55.1323	-1.4965
$6\pi/30$	-27.9058	-0.7904	46.4312	-1.3663
$7\pi/30$	-91.2299	4.0797	36.2701	-1.1161
$8\pi/30$	-128.1581	7.8137	24.5217	-0.7803
$9\pi/30$	-157.8320	10.1342	12.3298	-0.3961
$\pi/3$	-161.7297	10.9117	0	0

Також були обчислені нормальні напруження на конічній поверхні $\theta = \omega$ в залежності від r. Отримані результати наведені у таблиці 3

Таблиця 3 – Нормальні напруження на конічній поверхні

r	$\sigma_\theta(r,\omega)$	r	$\sigma_\theta(r,\omega)$	r	$\sigma_\theta(r,\omega)$
1.0	-312.6004	1.7	-79.6389	2.4	-22.6571
1.1	-265.5978	1.8	-65.9327	2.5	-19.0166
1.2	-217.8474	1.9	-54.8206	2.6	-15.9316
1.3	-177.3388	2.0	-45.7499	2.7	-13.3081
1.4	-144.3499	2.1	-38.2929	2.8	-11.0725
1.5	-117.8563	2.2	-32.1192	2.8	-9.1667
1.6	-96.6485	2.3	-26.9733	3.0	-7.5452

У даному випадку всі напруження від'ємні, тобто розтягуючи, що можна пояснити умовою ковзкого контакту на цій поверхні. Крім того вони за абсолютною величиною спадають, при цьому їх значення коли $r = a$ набагато більші за абсолютною величиною ніж коли $r = b$.

6. Висновки. В роботі отримано точний розв'язок осесиметричної задачі термопружності для двічі усіченого конуса. Отримані вирази для температури, переміщень та напружень у конусі. Для заданого розподілу температури проведено дослідження напруженого стану на поверхні конуса.

Додаток. Коефіцієнти та праві частини системи (14)

$$a_{11}=\left[\nu_k\left(\nu_k+\kappa\right)-a^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k+\kappa+1\right)\right]\frac{a^{\nu_k-1}}{\kappa-1}$$

$$a_{12}=\left[a^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)-\left(\nu_k-\kappa-1\right)\right]\frac{a^{\nu_k-1}}{\kappa+1}$$

$$a_{13}=\left[R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k-\kappa\right)-a^2\nu_k\left(\nu_k+\kappa\right)\right]\frac{a^{-\nu_k-2}}{\kappa-1}$$

$$a_{14}=\left[R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+\kappa+2\right)-a^2\left(\nu_k+\kappa\right)\right]\frac{a^{-\nu_k-2}}{\kappa+1}$$

$$a_{21}=N_k\left[\nu_k+\kappa-a^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+\kappa+2\right)\right]\frac{a^{\nu_k-1}}{\kappa-1}$$

$$a_{22}=\nu_k\left[a^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)-\left(\nu_k-2\kappa-1\right)\right]\frac{a^{\nu_k-1}}{\kappa+1}$$

$$a_{23}=N_k\left[a^2\left(\nu_k-\kappa-1\right)-R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)\right]\frac{a^{-\nu_k-2}}{\kappa-1}$$

$$a_{24}=\nu_k\left[a^2\left(\nu_k-2\kappa-1\right)-R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\right]\frac{a^{-\nu_k-2}}{\kappa+1}$$

$$a_{31}=\left[\nu_k\left(\nu_k+\kappa\right)-b^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k+\kappa+1\right)\right]\frac{b^{\nu_k-1}}{\kappa-1}$$

$$a_{32}=\left[b^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)-\left(\nu_k-\kappa-1\right)\right]\frac{b^{\nu_k-1}}{\kappa+1}$$

$$a_{33}=\left[R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k-\kappa\right)-b^2\nu_k\left(\nu_k+\kappa\right)\right]\frac{b^{-\nu_k-2}}{\kappa-1}$$

$$a_{34}=\left[R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+\kappa+2\right)-b^2\left(\nu_k+\kappa\right)\right]\frac{b^{-\nu_k-2}}{\kappa+1}$$

$$a_{41}=N_k\left[\nu_k+\kappa-b^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+\kappa+2\right)\right]\frac{b^{\nu_k-1}}{\kappa-1}$$

$$a_{42}=\nu_k\left[b^2R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)-\left(\nu_k-2\kappa-1\right)\right]\frac{b^{\nu_k-1}}{\kappa+1}$$

$$a_{43}=N_k\left[b^2\left(\nu_k-\kappa-1\right)-R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)\right]\frac{b^{-\nu_k-2}}{\kappa-1}$$

$$a_{44}=\nu_k\left[b^2\left(\nu_k-2\kappa-1\right)-R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\right]\frac{b2}{\kappa+1}$$

$$b_1=\int_a^b\left\{\left[\nu_k\left(\nu_k+\kappa\right)-R^*\left(\nu_k\right)\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\left(\nu_k+1\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)\right]\frac{h_k^{(1)}(\rho)}{\kappa-1}-\right.$$

$$\left.-\left[\nu_k-\kappa-1+R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k-\kappa+1\right)\right]\frac{h_k^{(2)}(\rho)}{\kappa+1}\right\}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{\nu_k-1}d\rho$$

$$b_2=\int_a^b\left\{N_k\left[\nu_k+\kappa-R^*\left(\nu_k\right)\left(\frac{a}{\rho}\right)^2\left(\nu_k+\kappa+2\right)\right]\frac{h_k^{(1)}(\rho)}{\kappa-1}-\right.$$

$$\left.-\nu_k\left[\nu_k-2\kappa-1+R^*\left(\nu_k\right)\left(\nu_k+1\right)\right]\frac{h_k^{(2)}(\rho)}{\kappa+1}\right\}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{\nu_k-1}d\rho$$

$$b_3=\int_a^b\left\{\left(\nu_k+1\right)\left[\nu_k-R^*\left(\nu_k\right)\left(\frac{\rho}{b}\right)^2\left(\nu_k-\kappa+1\right)\right]\frac{h_k^{(1)}(\rho)}{\kappa-1}+\right.$$

$$\left.+\left[\nu_k+\kappa-R^*\left(\nu_k\right)\left(\frac{\rho}{b}\right)^2\left(\nu_k+\kappa+2\right)\right]\frac{h_k^{(2)}(\rho)}{\kappa+1}\right\}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{\nu_k}d\rho$$

$$b_4=\int_a^b\left\{N_k\left[R^*\left(\nu_k\right)\left(\frac{\rho}{b}\right)^2\left(\nu_k-\kappa+1\right)-\left(\nu_k-\kappa-1\right)\right]\frac{h_k^{(1)}(\rho)}{\kappa-1}+\right.$$

$$\left.+\nu_k\left[R^*\left(\nu_k\right)\left(\frac{\rho}{b}\right)^2\left(\nu_k+1\right)-\left(\nu_k-2\kappa-1\right)\right]\frac{h_k^{(2)}(\rho)}{\kappa+1}\right\}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{\nu_k}d\rho$$

де $R^*\left(\nu_k\right)=\dfrac{R\left(\nu_k+1\right)}{R\left(\nu_k\right)}=\dfrac{2\nu_k-1}{2\nu_k+3}$

Література.

1. Johnson, Donal E. "Thermoelastic analysis of a solid cone." *AIAA Journal* 4.1 (1966): 118-125.

2. Podil'chuk, Yu. N. "Exact analytical solutions of three-dimensional static thermoelastic problems for a transversally isotropic body in curvilinear coordinate systems." *International applied mechanics* 37.6 (2001): 728-761.

3. Khomasudridze, N. G. "The thermoelastic equilibrium of conical bodies." *Journal of applied mathematics and mechanics* 67.1 (2003): 111-120.

4. Xu, Yong-Tie, and Li-Li Zhang. "3D Green's functions for a transversely isotropic thermoelastic cone." *Applied Mathematical Modelling* 36.12 (2012): 5891-5900.

5. Wu, Di, Lianzhi Yang, and Yang Gao. "Three-dimensional Green's functions of thermoporoelastic axisymmetric cones." *Applied Mathematical Modelling* 42 (2017): 315-329.

6. Попов Г.Я. Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2003, т. 46, № 3, с. 74 – 89.

7. Попов Г.Я. Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики. Уточнения и дополнения к статье. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2005, т. 48, № 3, с. 75 – 81.

8. Попов, Г. Я. Явное решение смешанной задачи стационарной несвязной термоупругости для усеченного кругового полого конуса. *Доклады Академии наук*. 2001, т. 380. № 3, с. 349 – 354.

9. Popov, G. Ya. "Exact solutions of some mixed problems of uncoupled thermoelasticity for a truncated hollow circular cone with a groove along the generatrix." *Journal of applied mathematics and mechanics* 66.4 (2002): 661 – 672.

10. Коваленко А.Д. Термоупругость. К: Вища школа. 1975, 216 с.

11. В. Новацкий. Теория упругости. М: Мир. 1975, 972 с.

12. Попов Г.Я. О некоторых интегральных преобразованиях и об их применении к решению задач математической физики. Украинский математический журнал. 2001, т. 53. № 6, с. 810 – 819.

13. Попов Г.Я. О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их прменению к краевым задачам механики. Прикладная механика. 2003, т.39. № 12, с. 74 – 89.

14. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М: Наука. 1973, 296 с.

Abstract. *An axisymmetric thermoelastic problem on the stress state of a twice truncated cone is considered under the conditions of smooth contact on a conical surface and fixed spherical surfaces. The temperature is set on one of the spherical surfaces, and the other surfaces of the cone are thermally insulated. The use of new integral transforms in the meridional angle directly to the heat conduction equation and to the inhomogeneous Lamé equations allows us to reduce the problem to one-dimensional boundary value problems. The solution of the latter is obtained explicitly. The stresses on the surface of the cone are investigated and the zones of compressive and tensile stresses are identified.*

Key words: *Twice-truncated cone, thermoelasticity, integral transformations, exact solution, study of stress fields.*

Науковий керівник: к. ф.-м. н., доц. Процеров Ю.С.

Дослідження виконано за підтримки гранту Horizon 2020 Grant 101008140 EffectFact "Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing, theory, numerical methods and impactful applications".