



УДК 372.851

TEXT PROBLEMS IN THE COURSE OF HIGHER MATHEMATICS

ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Valerii Biziuk / Бізюк В.В.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor. / к.т.н., доц.

ORCID ID <https://orcid.org/0000-0003-1235-9881>

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

Kharkiv, Chornohlazivska St., 17, 61002

Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова,

Харків, вул. Чорноглазівська, 17, 61002

Анотація. Метою статті є аналіз моделей, що використовуються при розв'язуванні текстових математичних задач, та створення на базі результатів аналізу алгоритмів розв'язування таких задач. Досліджується особливість використання текстових задач у вищій математиці в порівнянні з шкільною освітою. Аналізується впровадження текстових задач в навчальний процес як опанування методами побудови математичної моделі дослідження реальних явищ, процесів в різних галузях науки і техніки.

Ключові слова: текстові задачі; математична модель; диференціальні рівняння; інтегральне числення; вища математика.

Вступ.

Текстові задачі в математиці досить розвинений метод подання завдання. Суть методу полягає в тому, що подане текстом завдання має бути записано за допомогою математичних формул, схеми, рисунку, таблиці з подальшим трансформуванням в аналітичну форму. Інакше кажучи, будується математична модель задачі. В більшості математична модель являє собою алгебраїчне чи диференціальне рівняння або систему рівнянь, які вже абстрагуються від текстового змісту і надають можливість математичними розрахунками дійти розв'язку задачі. Одержаний результат інтерпретується відповідно до вихідної умови.

В середній освіті текстові задачі стали звичайним явищем, використовуються в навчальному процесі як поширений спосіб тренувати та перевіряти розуміння учнями основних концепцій, понять за допомогою описової задачі, а не лише здійснювати алгебраїчні перетворення чи інші механічні навички. Підручники з математики насичені текстовими задачами [1, 2, 3, 4]. Найбільш типовими прикладами таких задач є задачі на рух, на роботу, на суміші, на відсотки. . Створені посібники, які містять теоретичні відомості з



методики навчання учнів розв'язувати текстові задачі шкільного курсу математики, зразки розв'язування задач різних типів, добірку завдань для самостійної роботи, а також текстові задачі із завдань основних сесій НМТ з математики [5]. Далі більше, створені і діють курси, вебіари для викладачів, наприклад, «Текстові задачі з кількома параметрами та методика їх розв'язування». Нарешті, в середній школі поширені текстові задачі як методичний прийом освоєння математичного моделювання – одного з основних шляхів прикладного застосування математичних знань. Як підсумок, зазначимо, що в середній освіті великого значення надається створенню багатостороннього, широко розвиненого комплексу текстових задач.

У вищій школі існують суттєві особливості текстових задач порівняно з шкільними. Це проявляється вже з перших розділів курсу вищої математики, зокрема, диференціального та інтегрального числення, коли основна мета – оволодіння технікою диференціювання чи інтегрування. Трохи жвавіше в аналітичній геометрії, де використовуються текстові задачі, щоправда геометричного змісту. З реальних задач можна привести досить відому і досить цікаву задачу про відбивач автомобільної фари.

Задача. Обчислити форму відбивача світла автомобільної фари, який відбиває промені від джерела (лампочки) в паралельний потік (рисунок 1).

Розв'язування. Відповідно закону оптики кут падіння променю дорівнює куту його відбиття.

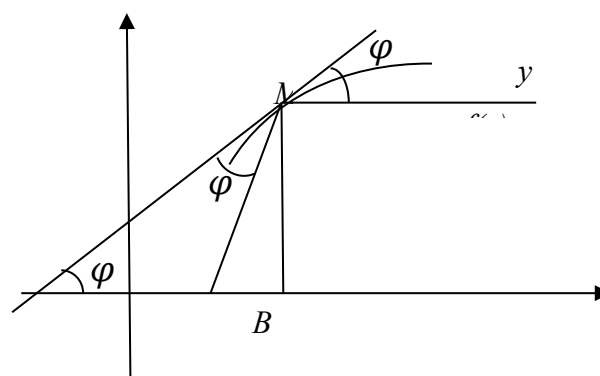


Рисунок 1 - Геометрія відбивача фари.

Позначимо цей кут через φ . Джерело світла помістимо в точку $B(a; 0)$.



Після нескладних викладок одержимо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{1}{y} \left(\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - (x-a) \right),$$

яке можна вважати математичною моделлю поставленої задачі. Розв'язок цього рівняння

$$y^2 = 2(a+C)x + C^2 - a^2.$$

Якщо покласти $C=a$, одержимо рівняння $y^2 = 4ax$. Нарешті, якщо записати параметр $a = \frac{p}{2}$, одержимо канонічне рівняння параболи $y^2 = 2px$.

Відмітимо важливу деталь – для побудови математичної моделі використано закон оптики.

Ми віддаємо належне текстовим задачам, які є важливим елементом математичної освіти, оскільки вони допомагають застосовувати теоретичні знання у практичних ситуаціях, розвивають аналітичне мислення – уміння аналізувати умову задачі та будувати математичну модель, логіку – знаходження правильного алгоритму розв'язання.

Спробуємо з'ясувати в чому особливість текстових задач у вищій математиці. Розглянемо наступну задачу з електротехніки.

Задача. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та індуктивності L (рисунок 2). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t=0$ (перемикач K переводиться в момент $t=0$ із положення A в положення B).

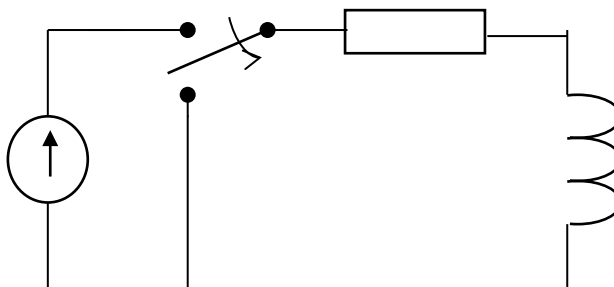


Рисунок 2 - Контур з опору та індуктивності.



Розв'язання.

Нехай $i(t)$ – шукана сила струму. У момент перемикання $t=0$ за законом Ома сила струму

$$i(0) = \frac{E}{R}.$$

Після перемикання за другим законом Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Одержали диференціальне рівняння першого порядку з початковою умовою, яке можна вважати математичною моделлю задачі. Рівняння розв'язується операційним методом за допомогою перетворення Лапласа. Проте, його можна розв'язати і як диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Враховуючи початкову умову

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі.

Як бачимо, для побудови математичної моделі задачі необхідні знання з електротехніки, тобто прикладної дисципліни. У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ($F = ma$, де m – маса тіла, a – прискорення руху, F – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебраїчна сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину в певний момент часу) тощо. Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Текстові задачі у вищій математиці можуть бути класифіковані за методами



їх розв'язання та галузями застосування. З іншого боку вони охоплюють різні математичні розділи, кожен із яких має свої особливості та підходи до розв'язку.

Похідні широко використовуються для аналізу зміни функцій, оптимізації процесів та знаходження критичних точок.

Приклад. Знайти точку мінімуму функції витрат виробництва:

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Знаходимо похідну:

$$C'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Рівняння $C'(x)=0$ дає критичні точки, які можна дослідити на екстремум.

Застосування диференціальних рівнянь для побудови математичної моделі зводиться здебільше до диференціальних рівнянь першого порядку [6, 7].

Диференціальні рівняння другого порядку відображають коливання елементів систем під дією вимушеної сили, або вільні коливання. В кожному разі це складні задачі математичної фізики і виділені в окремий розділ курсу вищої математики.

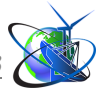
Застосування визначеного інтеграла в текстових задачах в більшості обмежується геометричними задачами обчислення площі плоскої фігури. Іноді обчислення об'єму тіл, зокрема тіл обертання, площі поверхні. Між тим досить цікавими і корисними можуть бути задачі на обчислення роботи, інших характеристик реальних процесів [8]. Наведемо приклади.

Задача. Продуктивність праці робітника протягом дня задається функцією $z(t) = -0,00645t^2 + 0,05t + 0,5$ (грош. од./год), де t – час в годинах від початку роботи, $0 \leq t \leq 8$. Знайти функцію $Q = Q(t)$, яка показує обсяг продукції (у вартісному виразі) та його величину за робочий день.

Розв'язання:

$$Q = \int_0^8 z(t) dt = \int_0^8 (-0,00645t^2 + 0,05t + 0,5) dt = 4,4992 (\text{грош. од.})$$

Задача. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $V = 2t + 1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.



Розв'язання:

$$S = \int_1^3 (2t + 1)dt = \left(\frac{2t^2}{2} + t \right) \Big|_1^3 = 10(\text{м}).$$

Задача. Тіло рухається під дією сили $F(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Обчислити роботу, виконану силою на відрізку від $x=1$ до $x=4$. Для розв'язання досить обчислити інтеграл $W = \int_1^4 (3x^2 - 2x + 1) dx$.

Текстові задачі на роботу, на рух дуже корисні і досить прості, які можна використовувати в курсах вищої математики в інтегральному численні як застосування визначеного інтеграла. Застосування інтегралів для обчислення роботи дозволяє, наприклад, враховувати зміни електричного поля та рух заряджених часток. Причому, як у сталому, так і в змінному полі. Можна зв'язати роботу електричного поля з потенціальною енергією заряду.

Висновки.

Були розглянуті текстові задачі в математиці в широкому діапазоні їх застосування від середньої освіти до використання в курсі вищої математики. Відмічається значимість текстових задач в навчальному процесі в освоєнні побудови математичної моделі реальної ситуації. Причому послідовність розв'язування текстової задачі природнім чином відповідає прийнятим етапам побудови моделі від формулювання та постановки задачі, розв'язку до дослідження, аналізу співвідношення з поставленою реальною задачею, інтерпретацією одержаного розв'язку. Були розглянуті конкретні задачі з різних дисциплін – математики, фізики, механіки, економіки та з відповідним математичними методами їх розв'язування.

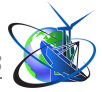
Були отримані результати, які, зокрема, пояснюють різницю в застосуванні текстових задач в математиці середньої школи і в курсі вищої математики. На відміну від шкільного курсу, де текстові задачі здебільшого зводяться до простих рівнянь або систем рівнянь, у вищій математиці такі задачі можуть містити складні моделі, що вимагають використання диференціального та інтегрального числення, лінійної алгебри, теорії ймовірностей тощо. Інша особливість пов'язана з необхідністю знань законів відповідної прикладної дисципліни для



побудови математичної моделі. Проведена класифікація текстових задач за методами їх розв'язання залученням диференціального, інтегрального, операційного числення, лінійної алгебри. Отримані результати рекомендують широке впровадження в методичні джерела, посібники диференційовано для майбутніх спеціальностей – електротехнічних, будівельних, економічних. Наприклад, курс вищої математики для електротехнічних спеціальностей, насичений текстовими задачами, описами відповідних процесів в електротехніці, чи курс вищої математики для економістів чи менеджерів. Текстові задачі доцільно рекомендувати студентам при підготовці доповідей для участі в студентських наукових конференціях. Текстові задачі розширюють сприйняття математики як інструмент для пізнання, дослідження реальних процесів, розширенню світогляду.

Література:

1. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П.Нелін. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.
2. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с. : іл.
3. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 400 с. : іл.
4. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / О. С. Істер. Київ : Генеза, 2018. 384 с. : іл.
5. Практикум із розв'язування задач шкільного курсу математики. Текстові задачі : навчально-методичний посібник / О. М. Королук. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. 68 с.
6. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней.



Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.

7. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2014. 360 с.

8. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах: Підручник. К.: Либідь, 2003. 504 с.

Abstract. *The purpose of this article is to analyze the models used in solving mathematical word problems and to develop solution algorithms based on the results of this analysis. The study explores the specific features of using word problems in higher mathematics compared to secondary education. It also examines the integration of word problems into the educational process as a means of mastering methods for constructing mathematical models to study real-world phenomena and processes in various fields of science and engineering.*

Key words: *text problems; mathematical model; differential equations; integral calculus; higher mathematics.*

Статтю надіслано: 24.04.2025 р.

© Бізюк В.В.