



УДК 539.3

CONTACT PROBLEMS FOR PERIODICALLY PLACED OVERLAYS AND TWO IDENTICAL PRESTRESSED STRIPS

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЕРІОДИЧНО РОЗМІЩЕНИХ НАКЛАДОК І ДВОХ ОДНАКОВИХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СМУГ

Babich S.Yu. / Бабич С.Ю.,*d.t.s., prof. / д.т.н., проф.*

ORCID: 0000-0003-2642-9115

*Institute of Mechanics S.P. Tymoshenko of the National Academy of Sciences**Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України,**Nesterova St. 3, Kyiv, 03057**Київ, вул. Нестерова, 3, 03057***Zhiguts Yu.Yu. / Жигуц Ю.Ю.***d.t.s., prof. / д.т.н., проф.*

ORCID: 0000-0002-7477-7619

*Uzhhorod National University, Uzhhorod, Sq. Narodna, 3, 88000**Ужгородський національний університет, Ужгород, пл. Народна, 3, 88000**Transcarpathian Hungarian Institute named after Ferenc Rákóczi II,**6 Kossuth Square, Berehove, Ukraine, 90202**Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,**площа Кошута, 6, м. Берегово, Україна, 90202*

Abstract. *The paper deals with the solution of the contact problem for periodically placed overlays and two identical prestressed strips.*

The latter are caused by various reasons, such as technological operations performed during the manufacture of materials or assembly of structures. In the case of composite materials, the initial stresses usually correspond to the stresses along the reinforcing elements. In the earth's crust, they are formed as a result of gravitational forces and tectonic processes. They must be taken into account when solving problems of soil deformation (especially frozen soils). Elastic-plastic bodies may also have internal residual stresses after the load is removed.

Keywords: *contact characteristic, deformations, initial stresses, Hilbert kernel, incompressible bodies, elastic potentials.*

Introduction.

The relevance of contact problems involving the influence of initial stresses based on the contact characteristic should not be in doubt, since initial stresses are present in almost all structural elements and machine parts [1-3].

The study of contact problems in bodies with initial stresses is of particular interest due to the introduction of new artificial materials that can withstand large initial deformations [4]. Sometimes it is advisable to create initial stresses (residual and technological) to compensate for the stresses that occur in structural elements, as well as to increase the strength characteristics of structures [5-11].



Problem statement.

Let two strips be made of the same compressible or incompressible material with arbitrary structure potential and subjected to the same initial (residual) stresses. They are connected to each other on finite segments $[-a+2kl; a+2kl]$, ($l > a$, $k=0 \pm 1, \pm 2, \dots$) by periodically placed elastic pads of small thickness h (Fig. 1).

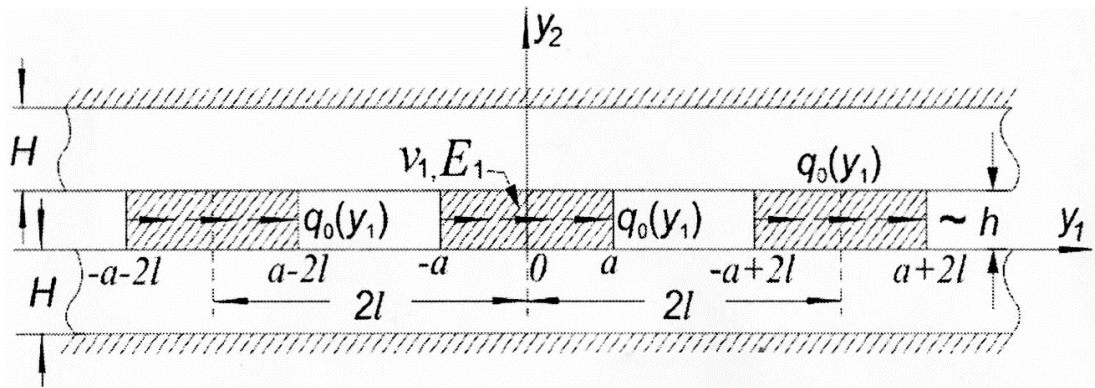


Figure 1 - Diagram showing the placement of overlays and acting forces, where H is the thickness of the strips, h is the thickness of the overlays, E_1 is the modulus of elasticity of the overlays, ν_1 is Poisson's ratio, $q_0(y_1)$ is the intensity of horizontal periodic loading [4]

Due to the periodicity of the method used to solve the problem, the influence of the initial stresses under each overlay is the same, so we will limit ourselves to considering only one of them, for example, the overlay located on the segment $[-a, a]$.

Taking into account the bending and tensile conditions of the overlay, we obtain:

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^{y_1} [2q(\xi) - q_0(\xi)] d\xi, \quad -a < y_1 < a;$$

$$\frac{dv(y_1)}{dy_1} = 0 \quad \forall y_1 \in (-a < y_1 < a), \quad (1)$$

Here, $u(y_1)$ and $v(y_2)$ are the displacements of the boundary points of the overlay.

Conditions for full contact:

$$u(y_1) = u_1(y_1); v(y_1) = u_2(y_1); -a < y_1 < a. \quad (2)$$

It is necessary to determine the distribution law of normal and tangential contact stresses along the connection line.



Solution to the problem.

If we take into account (2) and the displacement of the boundary points of the strip in the contact region $y_1 \in [-a, a]$ at the boundary $y_2 = 0$, then we obtain the well-known system of integro-differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_1} &= \left[\int_{-a}^a h_{11}(|y_1 - t|)p(t)dt + \int_{-a}^a h_{12}(y_1 - t)q(t)dt \right] = 0; \\ \frac{d}{dy_1} &= \left[\int_{-a}^a h_{21}(y_1 - t)p(t)dt + \int_{-a}^a h_{22}(|y_1 - t|)q(t)dt \right] = \\ &= \frac{1}{E_1 h} \left[2 \int_{-a}^{y_1} q(t)dt - Q_0 \theta(y_1) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

for $-a < y_1 < a$.

After substituting the values of the expressions $h_{ij}(i, j=1, 2)$ and performing a series of transformations, introducing a new function $X(\tau) = \hat{p}(\tau) + i\hat{q}(\tau)$ and performing the substitution $(\tau = \xi, \eta) \delta = \frac{\pi a}{l}$ we obtain the following singular integral equation with a Hilbert kernel:

$$\begin{aligned} i\beta_1 X(\xi) + \int_{-\delta}^{\delta} X(\eta) ctg \frac{\xi - \eta}{2} d\eta - \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{11}(\xi - \eta) X(\eta) d\eta - \\ - i \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{12}(\xi - \eta) X(\eta) d\eta - \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{22}(\xi - \eta) \bar{X}(\eta) d\eta + \beta_2 \int_{-\delta}^{\delta} [X(\eta) - \bar{X}(\eta)] d\eta = \\ = i[\beta_2 \tilde{Q}_1(\xi) + \lambda_4] dt - \frac{\beta_1}{2\pi}; \quad (-\delta < \xi < \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

With boundary condition

$$\int_{-\delta}^{\delta} X(\eta) d\eta = \frac{i\pi}{l} \quad (4)$$

We seek the solution to equation (3) in the form of a series of Jacobi functions:

$$X(\xi) = w(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n P_n^{a, \beta} \left(ctg \frac{\delta}{2} t g \frac{\xi}{2} \right), \quad |\xi| < \delta, \quad (5)$$

where $\left\{ P_n^{(\alpha, \beta)} \left(ctg \frac{\delta}{2} t g \frac{\xi}{2} \right) \right\}_{n=0}^{\infty}$ – Jacobi polynomials orthogonal on the interval $[-\delta; \delta]$ with respect to weight



$$w(\xi) = \sec \frac{\xi}{2} \left(\sin \frac{\delta - \xi}{2} \right)^a \left(\sin \frac{\delta + \xi}{2} \right)^\beta, \quad a = -\frac{1}{2} - ia_1; \quad \beta = -\frac{1}{2} + ia_1;$$

$$a_1 = \frac{\ln(3-4c_{44})}{2\pi},$$

c_{44} – parameter that determines the initial stress state in the strips.

We obtain a quasi-regular system of algebraic equations:

$$l_m \tilde{X}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_{m,n}^{(1)} \tilde{X}_n + D_{m,n}^{(2)} \tilde{\tilde{X}}_n \right] = - \left[D_m^{(0)} + D_m^{(1)} X_0 + D_m^{(2)} \bar{X}_0 \right], \quad (6)$$

$$(m = 1, 2 \dots).$$

$l_m, D_{m,n}^{(1)}, D_{m,n}^{(2)}, D_m^{(0)}, D_m^{(1)}, D_m^{(2)}, (m = 1, 2 \dots)$ – known quantities that depend on the pre-stressed state.

Numerical analysis was performed for two specific elastic potentials: harmonic and Bartyenev-Khazanovich (Figs. 2 and 3).

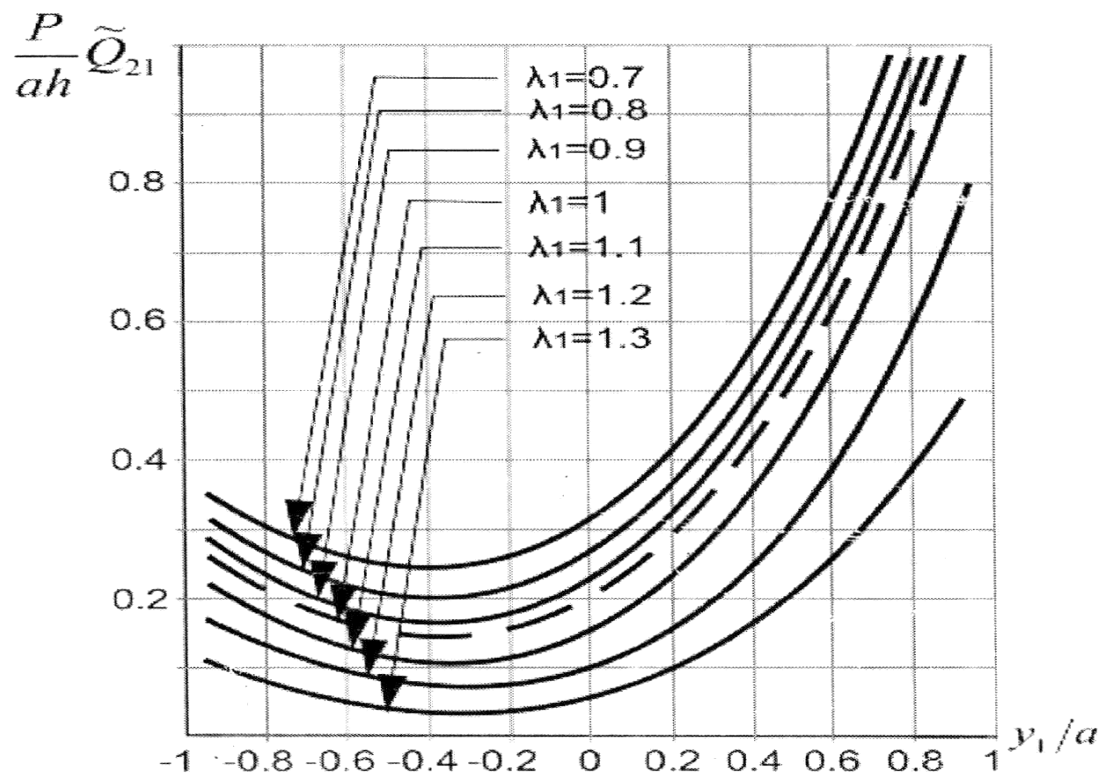


Figure 2 - Numerical analysis for harmonic elastic potentials

Author's development.

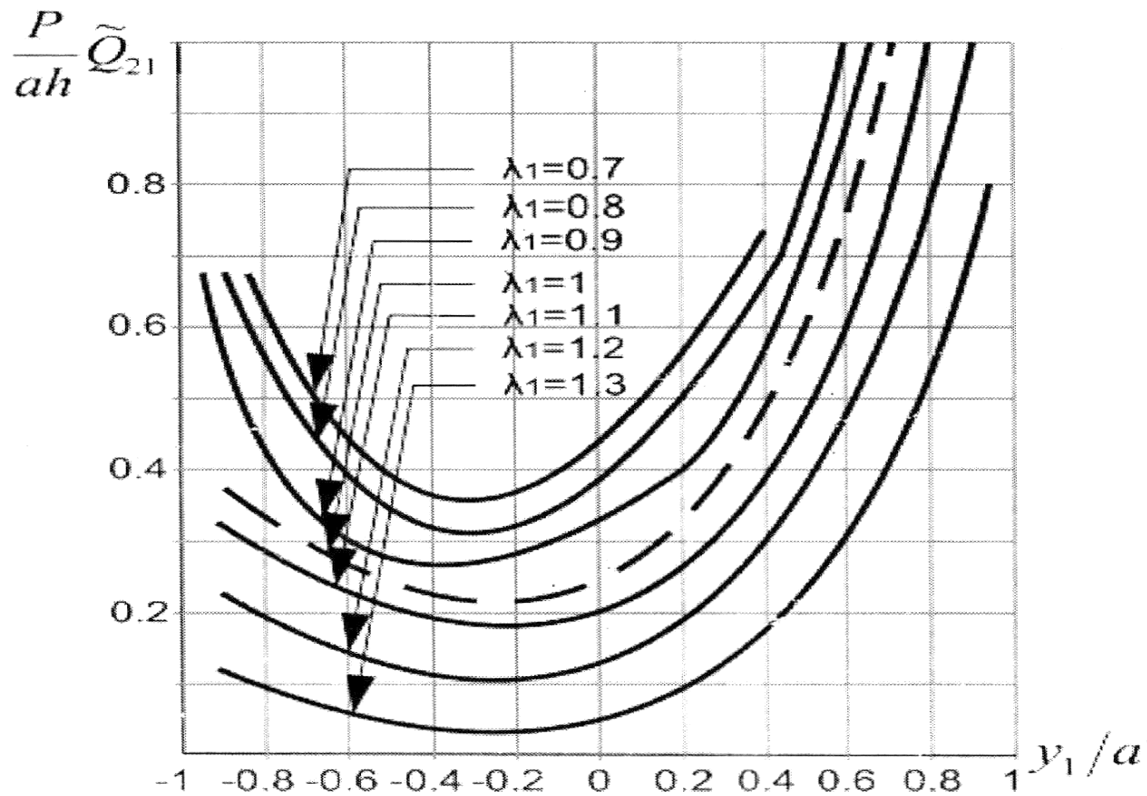


Figure 3 - Numerical analysis for Bartyenev-Khazanovich potentials

Author's development.

Discussion of the results obtained.

In the absence of initial stresses, the results obtained coincide with the classical ones (Figures 2 and 3, dashed line) [1].

When the initial stresses approach critical values (for the Bartyenev-Khazanovich potential $\lambda_I^{kp} = 3^{-0.5}$, where λ_I is the elongation coefficient), surface instability occurs. In other words, the results obtained are valid only for $\lambda_I^{kp} > 3^{-0.5}$.

Conclusions.

Based on the numerical calculations, the following conclusions can be drawn:

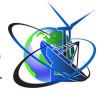
1. Initial stresses affect the basic contact characteristics. This effect is particularly significant for incompressible bodies (Bartyenev-Khazanovich potential) compared to compressible materials.
2. The authors have confirmed by analytical calculations that in the absence of initial stresses, the dependencies of elastic potentials completely coincide with the classical ones.



3. When studying the analytical dependencies of approximations, it was found that the results correspond to the conditions of stability at $\lambda_I^{kp} > 3^{-0,5}$.

References:

1. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: изд. Ереванского ун-та, 1983. – 260 с.
2. Рудницкий В. Б., Дихтярук Н. Н. Контактная задача о взаимодействии бесконечного стрингера и двух одинаковых полос с начальными напряжениями// Прикл. механика. – 2017. – 53, № 2. – С. 41-48.
3. Guz A., Babich S., Gluhov Yu. Mixed problems for a prestressed elastic foundation, Lambert Academic Publishing (2015).
4. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динаміка двошарового напівпростору з початковим напругами при впливі рухомого навантаження // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Математика і інформатика. Ужгород: Видавництво УЖНУ. Говерла, 2022. Т. 40, № 1. – С. 94-108.
5. Babich S., Zhiguts Y., Lazar V. Analysis of two-layer semi-space with initial stress // The XXIII International Scientific and Practical Conference «Theoretical and science bases of actual tasks», June 14 – 17, Lisbon, Portugal. 2022. – P. 575-584.
6. Babich S. Yu., Zhiguts Yu. Yu., Lazar V. F. Dynamic tensioned two-layer semi-space under the influence of moving load // The 9th International scientific and practical conference “Modern science: innovations and prospects” (May 29-31, 2022) SSPG Publish, Stockholm, Sweden. 2022. – P. 201-207.
7. Babich S., Zhiguts Yu., Lazar V. Method of calculation of dynamics of two-layer semi-space with initial stresses // The XXIV International Scientific and Practical Conference «Multidisciplinary academic notes. Science research and practice», June 21 – 24, 2022, Madrid, Spain. – P. 523-527.
8. Babich. S. Yu., Zhiguts Yu. Yu., Lazar V. F. The influence of initial tensions on the reliability and strength of pretensioned structures in the contact interaction of elastic stamps // The 43th International scientific and practical conference «Science and Innovations: Global Challenges» (December 19-20, 2022) Myśl Naukowa, Poland,



Warsaw. 2022. p. 6-15.

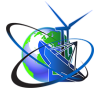
9. Babich S., Glukhov Yu., Zhiguts Yu. Solution of the plane problem on the determination of stresses under the action of a moving load on the free surface of a half-space // The XXII International Scientific and Practical Conference «Methodology and organization of scientific research», June 03-05, 2024, Berlin, Germany. Pp. 434-437.

10. Babich S., Zhiguts Y., Glukhov Y. Solving the problem of determining the prestressed state of a half-space for mobile load conditions by integral fourier transforms // The 26th International scientific and practical conference “World problems and ways of solving modern problems” (July 02 – 05, 2024) Oslo, Norway. International Science Group. 2024. P. 233-237.

11. Babich S., Zhiguts Yu. Contact problems on the interaction of an infinite stringer and two identical pre-tensioned strips // Science and Information Technologies in the Modern World: Collection of Scientific Papers "International Scientific Unity" with Proceedings of the 1st International Scientific and Practical Conference. February 26-28, 2025. Athens, Greece. Pp. 494-497.

Анотація. Актуальність контактних задач з врахуванням впливу початкових напружень на основі контактної характеристики не повинна викликати сумнівів оскільки початкові напруження є практично в усіх елементах конструкцій і деталях машин. Останні зумовлені різними причинами, наприклад, технологічними операціями, виконуваними при виготовленні матеріалів, або складанням конструкцій. У випадку композиційних матеріалів початкові напруження, як правило, відповідають напруженням уздовж армуючих елементів. У земній корі вони утворюються внаслідок дії гравітаційних сил і тектонічних процесів. Їх необхідно враховувати при розв'язанні задач з деформації ґрунтів (особливо замерзлих). У пружно-пластичних тілах також можуть бути внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Особливу зацікавленість у зв'язку із запровадженнями на практиці нових штучних матеріалів, які можуть витримувати великі початкові деформації, викликає дослідження контактних задач у тілах з початковими напруженнями. Іноді доцільно створювати початкові напруження (залишкові і технологічні) для компенсації тих напружень, які виникають в елементах конструкцій, а також для підвищення міцності характеристик конструкцій.

При вихідних умовах задачі, коли дві смуги виготовлені з однакового стисливого, або нестисливого матеріалу з потенціалом довільної структури з однаковими початковими напруження з'єднані між собою на скінченних відрізках, авторами визначений закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень вздовж лінії з'єднання. Розв'язавши систему інтегро-диференціальних рівнянь у вигляді ряду по функціях Якобі отримуємо можливість провести числовий аналіз для двох конкретних пружних потенціалів: гармонічного і Бартенєва-Хазановича. Таким чином при наближенні значень початкових напружень до критичних значень (для потенціалу Бартенєва-Хазановича $\lambda_1^{kp} = 3^{-0,5}$, де λ_1



коефіцієнт подовження) виникає поверхнева нестійкість, тобто одержані результати мають місце тільки для $\lambda_1^{kp} > 3^{-0,5}$.

Ключові слова: контактна характеристика, деформації, початкові напруження, ядро Гільберта, нестисливі тіла, пружні потенціали.

Стаття підготовлена в рамках власної ініціативи авторів

Статтю надіслано: 18.08.2025 р.

© Babich S.Yu., Zhiguts Yu.Yu.